2025－2026学年人教版八年级数学上学期期末练习卷

一、选择题

1. 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（　　）

A 　B. 　C. 　D. 

2. 已知点 A（2，a）关于 x 轴的对称点为点 B（b，－3），则 $a+b$ 的值为（　　）

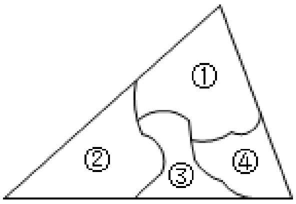
A. 5　B. 1　C. －1　D. －5

3. 以下列各组长度的线段为边，能构成三角形的是（　　）

A. 7cm，5cm，12cm　B. 6cm，8cm，15cm

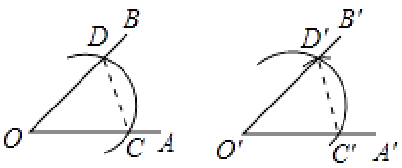
C. 8cm，4cm，4cm　D. 4cm，6cm，5cm

4. 打碎的一块三角形玻璃如图所示，现在要去玻璃店配一块完全一样的玻璃，最省事的方法是（　　）



A 带①②去　B. 带②③去　C. 带③④去　D. 带②④去

5. 如图，用尺规作图作"一个角等于已知角"的原理是：因为 $\Delta D'O'C' \cong \Delta DOC$，所以 $\angle D'O'C' = \angle DOC$。由这种作图方法得到的 $\Delta D'O'C'$ 和 ΔDOC 全等的依据是（　）



A. SSS　B. SAS　C. ASA　D. AAS

6. 下列计算正确的是（　　）

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$　B. $\left(a^2\right)^3 = a^6$　C. $(2a)^3 = 2a^3$　D. $a^{10} \div a^2 = a^5$

7. 若 $x^2+\left(m-3\right)x+4$ 是完全平方式，则 m 的值是（　　）

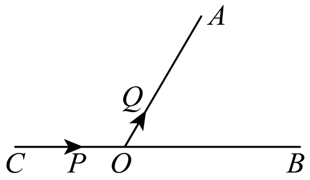
A. 7　B. -1　C. ± 7　D. 7 或 -1

8. 如果分式 $\dfrac{xy}{2x-3y}$ 中的 x，y 都扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）

A. 不变　　　　B. 扩大为原来的 2 倍

C. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$　　　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$

9. 如图，$\angle AOB=60°$，C是BO延长线上的一点，$OC=8\text{cm}$，动点P从点C出发沿CB以$3\text{cm}/\text{s}$的速度移动，动点Q从点O出发沿OA以$2\text{cm}/\text{s}$的速度移动，如果点P、Q同时出发，用$t(\text{s})$表示移动的时间，当t为（　　）s 时，$\triangle POQ$是等腰三角形.



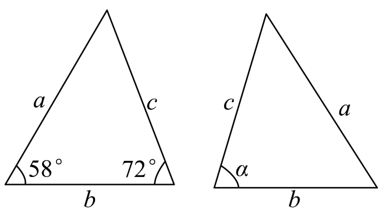
A. $\frac{8}{5}$　　　　B. 6　　　　C. $\frac{8}{5}$或 6　　　　D. $\frac{8}{5}$或 8

10. 若关于x的分式方程$\frac{kx}{x-1}-\frac{3k-1}{1-x}=3$无解，则$k$的值为（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　　　B. 3　　　　C. $\frac{1}{4}$或 3　　　　D. $-\frac{1}{3}$或 3

二、填空题

11. 已知图中的两个三角形全等，则$\angle\alpha$的度数是____________.

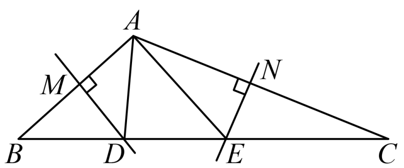


12. 若$a=(0.3)^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，则$a$，$b$，　的大小关系为______（用“<”连接）.

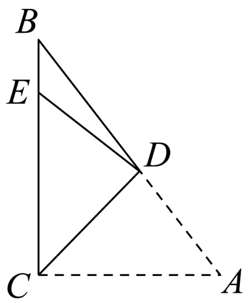
13. 若$2a+b=-5$，$2a-b=3$，则$4a^2-b^2$的值为______.

14. 要使$-x^3\left(x^2+ax+1\right)+2x^4$中不含有$x$的四次项，则$a=$______.

15. 如图，在　ABC中，边AB、AC的垂直平分线分别交BC于D、E，若$BC=15$，则　ADE的周长为________.

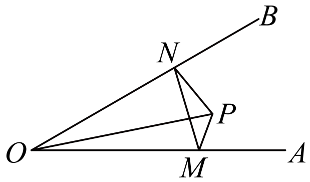


16. 如图，在 ABC 中，$\angle ACB=90°,\angle A=52°$，将其折叠，使点 A 落在边 BC 上的点 E 处，CA 与 CE 重合，折痕为 CD，则 $\angle EDB$ 的度数是_______.



17. 某市在旧城改造过程中，需要整修一段全长为 2400m 的道路．为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响，施工队实际工作效率比原计划提高了 20%，结果提前 8h 完成任务，则原计划每小时修路________.

18. 如图所示，在某草原上，有两条交叉且笔直的公路 OA，OB，$\angle AOB=30°$，在两条公路之间的点 P 处有一个草场，$OP=4$．现在在两条公路旁各有一户牧民在移动放牧，分别记为 M，N．若存在 M，N 使得 $\triangle PMN$ 的周长最小，则 $\triangle PMN$ 周长的最小值是______.



三、解答题

19. 因式分解：

(1) $3x-12x^3$；

(2) x^4-7x^2+6；

(3) $\left(a^2-4a\right)^2+8\left(a^2-4a\right)+16$.

(4) $\left(3x-y\right)^2-\left(x-3y\right)^2$

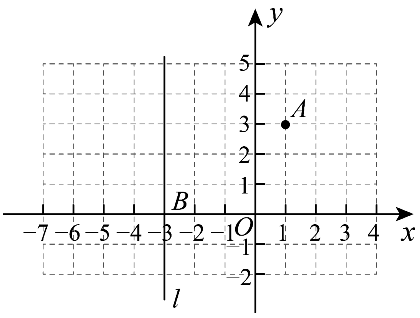
20. 计算：

(1) $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{2x-4}$

(2) 解方程 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x-2}=0$

(3) 先化简，再求值 $\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)\div\dfrac{a^2-a}{a+1}$，其中 $a=-\dfrac{1}{2}$

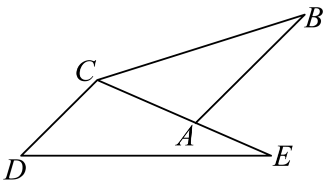
21. 点 A 在平面直角坐标系中的位置如图所示，直线 经过点 $B(-3,0)$ 且平行于 y 轴．



（1）写出点 A 关于 y 轴的对称点 A_1 的坐标__________；点 A 关于直线 的对称点 A_2 的坐标__________；

（2）若平面直角坐标系中有一点 $P(m,n)$，其中 $m>0$，点 P 关于 y 轴的对称点为 P_1，点 P_1 关于直线 的对称点为 P_2，求线段 P_1P_2 的长（用含 m 的式子表示）．

22. 如图，在 ABC 和△CED 中，$AB=CE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$．



（1）求证：$AB \parallel CD$；

（2）若 $AB=5$，$AE=2$，求 CD 长．

23. 已知 a、b、c 为△ABC 的三边长；

①b、c 满足（b－2）^{2}+|c－3|＝0，且 a 为方程|a－4|＝2 解，求出该三角形的周长，并判断△ABC 的形状．

②若 a＝5，b＝2，且 c 为整数，求△ABC 的周长的最大值和最小值．

24. 阅读下列解答过程，然后回答问题：

已知 x^2-7x+k 有一个因式 $(x-3)$，求 k 的值．

解：设另一个因式 $(x+a)$，则

$x^2-7x+k=(x-3)(x+a)$．即

$x^2-7x+k=x^2+(a-3)x-3a$（对任意实数 x 成立）

由此得：$\begin{cases} a-3=-7, \\ -3a=k \end{cases}$

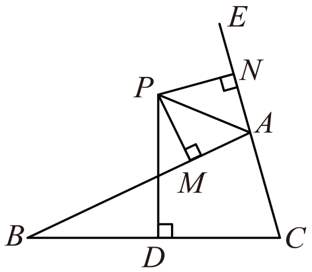
$\therefore k=12$

（1）已知 $x^2-15x-34$ 有一个因式 $(x+2)$，则另一个因式为______________；

（2）已知 $x^2+mx-24$ 有一个因式 $(x+6)$，则 m 的值为______________；

（3）已知多项式 x^3-3x^2+k 有一个因式 $(x-2)^2$，求 k 的值.

25. 如图，$\triangle ABC$ 中，BC 的垂直平分线与外角 $\angle EAB$ 的平分线交于点 P，$PM\perp AB$ 于 M，$PN\perp AE$ 于 N.



（1）求证：$BM=CN$；

（2）当 $AB=9$，$AC=5$ 时，求 BM 和 AM 的长.

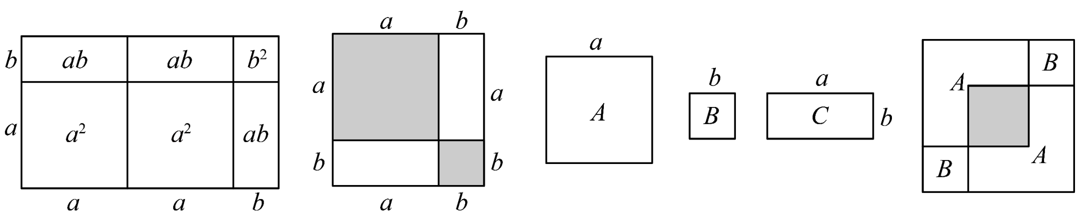
26. 中国交通科技领跑世界一流水平，公路网络“四通八达”，公路养护效能高，让人们对“美好出行”的需要得到很好的满足．某一段公路的维修养护工程，有甲、乙两个工程队可供选择，承包单位发现：①若由乙队单独完成全部工程所需天数是甲队单独完成全部工程所需天数的 1.5 倍；②若由甲队单独施工 5 天后，再由甲、乙两队共同施工 21 天可完成剩余工程；③若由两队同时进场施工完成全部工程，共需要工程费用 384000，且每天的工程费用甲队比乙队多 2000 元.

（1）求甲、乙两个工程队单独施工完成全部工程各需要多少天?

（2）从节省工程费用的角度考虑，请你从甲，乙单独施工完成与甲、乙同时进场施工完成这三种施工方案中选择一种合适的方案？并说明理由；

（3）若要使两个工程队完成全部工程施工总费用不超过 378000 元，则甲工程队至少要施工多少天?

27.“数形结合”是数学上一种重要的数学思想，在整式乘法中，我们常用图形而积来解释一些公式．如图(1)，通过观察大长方形而积，可得：$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

（1）如图（2），通过观察大正方形的面积，可以得到一个乘法公式，直接写出此公式；

（2）现有若干张如图（3）的三种纸片，A 是边长为 a 的正方形，B 是边长为 b 的正方形，C 是长为 a，宽为 b 的长方形．若要无缝无重叠拼出一个长为 $(2a+b)$，宽为 $(3a+2b)$ 的长方形，设需要 A 型纸片 x 张，B 型纸片 y 张，C 型纸片 z 张，直接写出 $x+y+z$ 的值；

（3）图（4）是由图（3）中的两张 A 型纸片和两张 B 型纸片排成的一个正方形，其中两张 A 型纸片有重叠（图中阴影部分），直接写出阴影部分的面积（用含 a，b 的式子表示）；

（4）若图（2）也是由图（3）中的三种纸片拼成的，且图（2）中的阴影部分面积为 17，图（4）中的阴影部分面积为 8，求图（2）整个正方形的面积．

28. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120°$，$\angle B=\angle ADC=90°$，E，F 分别是 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=60°$，试探究图 中线段 BE，EF，FD 之间的数量关系．

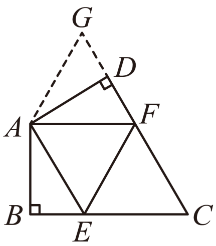


图1

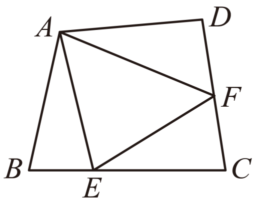


图2

（1）小亮同学认为：延长 FD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，如图 ，先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$，则可得到 BE，EF，FD 之间的数量关系：______；

（2）如图2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E，F 分别是 BC，CD 上的点，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由．

29. 定义：如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式，则称这个分式为“和谐分式”．如 $\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，$\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+2-5}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}+\frac{-5}{x+1}=2+\frac{-5}{x+1}$，则 $\frac{x+1}{x-1}$ 和 $\frac{2x-3}{x+1}$ 都是“和谐分式”．

（1）下列分式中，属于“和谐分式”的是_________（填序号）

①$\frac{x+1}{x}$；②$\frac{2+x}{2}$；③$\frac{x+2}{x+1}$；④$\frac{y^2+1}{y^2}$

（2）将“和谐分式”$\frac{a^2-2a+3}{a-1}$ 化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式为：

$$\frac{a^2-2a+3}{a-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_+\frac{2}{a-1}$$

（3）应用：先化简$\dfrac{3x+6}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$，并求$x$取什么整数时，该式的值为整数.

（4）拓展：若$\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$，求$A$、$B$的值.

2025－2026 学年人教版八年级数学上学期期末练习卷

一、选择题

1. 在以下绿色食品、回收、节能、节水四个标志中，是轴对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念求解．如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．

【详解】A．是轴对称图形，故 A 符合题意；

B．不是轴对称图形，故 B 不符合题意；

C．不是轴对称图形，故 C 不符合题意；

D．不是轴对称图形，故 D 不符合题意．

故选：A．

【点睛】本题主要考查轴对称图形的知识点．确定轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

2. 已知点 A（2，a）关于 x 轴的对称点为点 B（b，－3），则 $a+b$ 的值为（　　）

A. 5　　B. 1　　C. －1　　D. －5

【答案】A

【解析】

【分析】根据关于 x 轴对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数可得 a 、b 的值．

【详解】解：∵点 A（2，a）关于 x 轴的对称点为点 B（b，－3），

$\therefore a=3,\ b=2$，

$\therefore a+b=3+2=5$，

故选：A．

【点睛】本题主要考查了关于 x 轴对称点　坐标特点，关键是掌握点的坐标的变化规律．

3. 以下列各组长度的线段为边，能构成三角形的是（　　）

A. $7cm$，$5cm$，$12cm$　　B. $6cm$，$8cm$，$15cm$

C. $8cm$，$4cm$，$4cm$　　　　D. $4cm$，$6cm$，$5cm$

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形的三边关系：任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，逐项分析即可得到答案.

【详解】解：A.$\because 7+5=12$，

$\therefore 7cm$，$5cm$，$12cm$ 不能构成三角形，不符合题意；

B.$\because 6+8=14<15$，

$\therefore 6cm$，$8cm$，$15cm$ 不能构成三角形，不符合题意；

C.$\because 4+4=8$，

$\therefore 8cm$，$4cm$，$4cm$ 不能构成三角形，不符合题意；

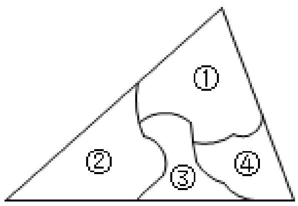
D.$\because 4+5=9>6$，

$\therefore 4cm$，$6cm$，$5cm$ 能构成三角形，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系，判断能否组成三角形的简便方法是看较短的两边的和是否大于第三边.

4. 打碎的一块三角形玻璃如图所示，现在要去玻璃店配一块完全一样的玻璃，最省事的方法是（　　）



A. 带①②去　　B. 带②③去　　C. 带③④去　　D. 带②④去

【答案】A

【解析】

【分析】由已知条件可知，该玻璃为三角形，可以根据这 4 块玻璃中的条件，结合全等三角形判定定理解答此题.

【详解】A 选项带①②去，符合三角形 ASA 判定，选项 A 符合题意；

B 选项带②③去，仅保留了原三角形的一个角和部分边，不符合任何判定方法，选项 B 不符合题意；

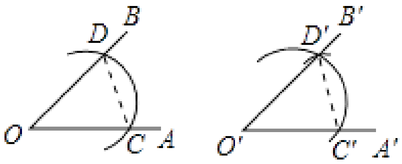
C 选项带③④去，仅保留了原三角形的一个角和部分边，不符合任何判定方法，选项 C 不符合题意；

D 选项带②④去，仅保留了原三角形的两个角和部分边，不符合任何判定方法，选项 D 不符合题意；

故选：A．

【点睛】此题主要考查全等三角形的判定方法的灵活运用，解答本题的关键是熟练掌握全等三角形的判定方法，包括：SSS、SAS、ASA、AAS、HL，做题时要根据已知条件进行选择运用．

5．如图，用尺规作图作“一个角等于已知角”的原理是：因为$\Delta D'O'C'\cong\Delta DOC$,所以$\angle D'O'C'=\angle \Delta DOC$.由这种作图方法得到的$\Delta D'O'C'$和ΔDOC 全等的依据是（　）



A. SSS　　　B. SAS　　　C. ASA　　　D. AAS

【答案】A

【解析】

【分析】利用基本作图得到 OD=OC=OD′=OC′，CD=C′D′ ，于是可利用“ SSS”判断△D′O′C′≌△DOC，然后根据全等三角形的性质得到角相等．

【详解】解：根据作图得 OD=OC=OD′=OC′，CD=C′D′，

所以利用“ SSS”可判断为△D′O′C′≌△DOC，

所以∠D′O′C′=∠DOC．(SSS)

故选 A.

【点睛】本题考查全等三角形的判定：全等三角形的 5 种判定方法中，选用哪一种方法，取决于题目中的已知条件．

6．下列计算正确的是（　　）

A．$a^2\cdot a^3=a^6$　　　B．$\left(a^2\right)^3=a^6$　　　C．$(2a)^3=2a^3$　　　D．$a^{10}\div a^2=a^5$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查幂的运算法则，包括同底数幂相乘、幂的乘方、积的乘方、同底数幂相除．需逐一验证各选项是否符合对应法则．

【详解】解：选项 A：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，即 $a^2\cdot a^3=a^{2+3}=a^5$，故 A 错误．

选项 B：幂的乘方，底数不变，指数相乘，$\left(a^2\right)^3=a^6$，故 B 正确．

选项 C：$(2a)^3=8a^3\neq 2a^3$，故 C 错误．

选项 D：同底数幂相除，底数不变，指数相减，$a^{10}\div a^2=a^{10-2}=a^8\neq a^5$，故 D 错误．

故选：B．

7. 若$x^2+(m-3)x+4$是完全平方式，则m的值是（　　）

A. 7　　B. -1　　C. ±7　　D. 7或-1

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式，掌握完全平方式的特点是关键；根据完全平方式的定义，比较系数求解．

【详解】解：$\because x^2+(m-3)x+4=x^2+(m-3)x+2^2$是完全平方式，

$\therefore m-3=\pm4$，

当$m-3=4$时，则$m=7$；

当$m-3=-4$时，则$m=-1$；

$\therefore m=7$或-1．

故选：D．

8. 如果分式$\frac{xy}{2x-3y}$中的x，y都扩大为原来的2倍，那么分式的值（　　）

A. 不变　　B. 扩大为原来的2倍

C. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的性质是解题的关键．

当x和y都扩大为原来的2倍时，代入新值计算分式，化简后比较与原分式的关系．

【详解】解：原分式为$\frac{xy}{2x-3y}$，当x和y都扩大为原来的2倍时，新分式为：

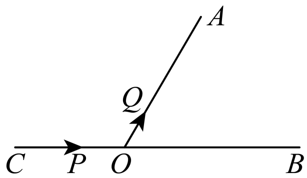
$$\frac{(2x)(2y)}{2(2x)-3(2y)}=\frac{4xy}{4x-6y}=\frac{4xy}{2(2x-3y)}=2\cdot\frac{xy}{2x-3y}$$

$\therefore$ 新分式是原分式的2倍，即分式的值扩大为原来的2倍．

故选：B．

9. 如图，$\angle AOB=60^\circ$，C是BO延长线上的一点，$OC=8\text{cm}$，动点P从点C出发沿CB以3cm/s的速

度移动，动点 Q 从点 O 出发沿 OA 以 $2\ cm/s$ 的速度移动，如果点 P、Q 同时出发，用 $t(s)$ 表示移动的时间，当 t 为（　　）s 时，$\triangle POQ$ 是等腰三角形.



A. $\frac{8}{5}$　　　B. 6　　　C. $\frac{8}{5}$ 或 6　　　D. $\frac{8}{5}$ 或 8

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定；解题时把几何问题转化为方程求解，是常用的方法，注意要分类讨论，当点 P 在点 O 的左侧还是在右侧是解答本题的关键.

根据等腰三角形的判定，分两种情况：(1) 当点 P 在线段 OC 上时；(2) 当点 P 在 CO 的延长线上时．分别列式计算即可求.

【详解】解：分两种情况：(1) 当点 P 在线段 OC 上时，

设 秒后 $\triangle POQ$ 是等腰三角形，

有 $OP=OC-CP=OQ$，

即 $8-3t=2t$，

解得，$t=\frac{8}{5}$；

(2) 当点 P 在 CO 的延长线上时，

当 $\triangle POQ$ 　等腰三角形时，

$\because \angle POQ=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle POQ$ 是等边三角形，

$\therefore OP=OQ$，

即 $2t=3t-8$，

解得，$t=8$，

故选：D.

10. 若关于 x 的分式方程 $\frac{kx}{x-1}-\frac{3k-1}{1-x}=3$ 无解，则 k 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{1}{4}$或 3　　D. $-\frac{1}{3}$或 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式方程无解问题，根据分式方程解的情况求值，解题关键是掌握上述知识点并能运用求解.

分式方程无解有两种情况：一是化简后的整式方程矛盾（系数为零但常数项不为零），二是解出的根是增根（分母为零）.

【详解】解：原方程：$\frac{kx}{x-1}-\frac{3k-1}{1-x}=3$.

去分母，得$kx+3k-1=3\left(x-1\right)$，

整理得：$\left(k-3\right)x+\left(3k+2\right)=0$.

情况一：方程矛盾无解.

当$k-3=0$且$3k+2\neq 0$，

即$k=3$.

情况二：解为增根$x=1$.

代入方程：$\left(k-3\right)\times 1+\left(3k+2\right)=0$，

解得：$k=\frac{1}{4}$.

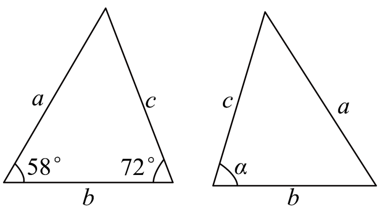
当$k=\frac{1}{4}$时，解出$x=1$，为增根.

综上，$k=\frac{1}{4}$或$k=3$.

故选：C.

二、填空题

11. 已知图中的两个三角形全等，则$\angle\alpha$的度数是____________.



【答案】$72°$

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质，全等三角形的对应角相等，那么边长为 b、c 的两条边的夹角对应相等，据此可得答案.

【详解】解：由题意得，$\angle\alpha=72°$，

故答案为：$72°$.

12. 若 $a=(0.3)^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$，则 a，b， 的大小关系为______（用“<”连接）.

【答案】$b<a<c$

【解析】

【分析】根据 $a=(0.3)^2=0.09$，$b=-3^{-2}=-\dfrac{1}{3^2}=-\dfrac{1}{9}$，$c=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=9$，比较即可.

【详解】$\because a=(0.3)^2=0.09$，$b=-3^{-2}=-\dfrac{1}{3^2}=-\dfrac{1}{9}$，$c=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=9$，

$\therefore -\dfrac{1}{9}<0.09<9$，

故 $b<a<c$，

故答案为：$b<a<c$.

【点睛】本题考查了幂的计算，负整数指数幂，实数大小比较，熟练掌握公式和大小比较的原则是解题的关键.

13. 若 $2a+b=-5$，$2a-b=3$，则 $4a^2-b^2$ 的值为______.

【答案】-15

【解析】

【分析】根据 $4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)$，直接把 $2a+b=-5$，$2a-b=3$ 整体代入求解即可.

【详解】解：$\because 2a+b=-5$，$2a-b=3$，

$\therefore 4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)=-5\times 3=-15$，

故答案为：-15.

【点睛】本题主要考查了平方差公式，熟知平方差公式是解题的关键：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

14. 要使 $-x^3(x^2+ax+1)+2x^4$ 中不含有 x 的四次项，则 $a=$______.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了多项式的混合运算．先算乘法，再合并，然后根据原多项式中不含有x的四次项，可得$2-a=0$，即可求解．

【详解】解：$-x^3\left(x^2+ax+1\right)+2x^4$

$=-x^5-ax^4-x^3+2x^4$

$=-x^5+\left(2-a\right)x^4-x^3$，

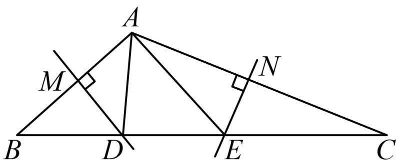
$\because -x^3\left(x^2+ax+1\right)+2x^4$中不含有$x$的四次项，

$\therefore 2-a=0$，

$\therefore a=2$．

故答案为：2

15. 如图，在$\triangle ABC$中，边AB、AC的垂直平分线分别交BC于D、E，若$BC=15$，则$\triangle ADE$的周长为________．



【答案】15

【解析】

【分析】本题考查线段的垂直平分线的性质，根据线段的垂直平分线上的点到线段两端的距离相等，可得$DA=DB$，$EA=EC$，通过等量代换即可求解．

【详解】解：$\because MD$垂直平分AB，NE垂直平分AC，

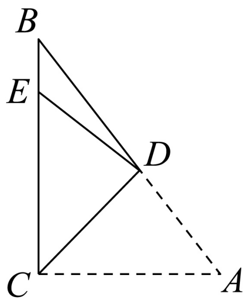
$\therefore DA=DB$，$EA=EC$，

$\therefore \triangle ADE$的周长$=AD+AE+DE=BD+CE+DE=BC=15$，

即$\triangle ADE$的周长为15，

故答案为：15．

16. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°,\angle A=52°$，将其折叠，使点$A$落在边$BC$上的点$E$处，$CA$与$CE$重合，折痕为$CD$，则$\angle EDB$的度数是_______．



【答案】14°##14 度

【解析】

【分析】根据直角三角形两锐角互余求出$\angle B$，在$\triangle BDE$中，利用三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式进行计算即可得解．

【详解】解：$\because \angle ACB=90°$，$\angle A=52°$，

$\therefore \angle B=90°-\angle A=90°-52°=38°$，

$\because \triangle CDE$是$\triangle CDA$翻折得到，

$\therefore \angle CED=\angle A=52°$，

在$\triangle BDE$中，$\angle CED=\angle B+\angle EDB$，

即$52°=38°+\angle EDB$，

$\therefore \angle EDB=14°$．

故答案为：14°．

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，翻折的性质及三角形内角和与外角的性质，熟练掌握相关概念是解题关键．

17. 某市在旧城改造过程中，需要整修一段全长为2400m 道路．为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响，施工队实际工作效率比原计划提高了20%，结果提前8h完成任务，则原计划每小时修路________．

【答案】50

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用，找到等量关系并正确列出方程是关键，注意要检验；设原计划每小时修路x米，根据实际工作效率提高20%和提前8小时完成任务，列出关于时间的方程．

【详解】解：设原计划每小时修路x米，则实际每小时修路$(1+20\%)x=1.2x$米．

原计划修路时间为$\dfrac{2400}{x}$小时，实际修路时间为$\dfrac{2400}{1.2x}$小时．

由题意得：$\frac{2400}{x}-\frac{2400}{1.2x}=8$，

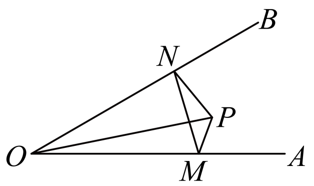
解得$x=50$．

经检验$x=50$是原分式方程的解．

故原计划每小时修路50米．

故答案为：50．

18. 如图所示，在某草原上，有两条交叉且笔直的公路OA，OB，$\angle AOB=30°$，在两条公路之间的点P处有一个草场，$OP=4$．现在在两条公路旁各有一户牧民在移动放牧，分别记为M，N．若存在M，N使得$\triangle PMN$的周长最小，则$\triangle PMN$周长的最小值是______．

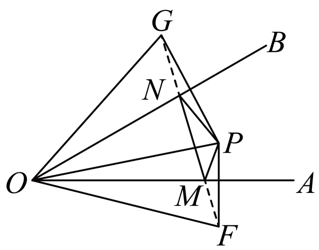


【答案】4

【解析】

【分析】本题考查的是轴对称－最短路线问题、等边三角形的判定和性质．作点P关于直线OA的对称点F，作点P关于直线OB的对称点G，连接FG，分别交OA、OB于M、N，得到$\triangle PMN$的周长的最小值为FG，再证得$\triangle FOG$为边长为4的等边三角形即可得出答案．

【详解】解：作点P关于直线OA的对称点F，作点P关于直线OB的对称点G，连接FG，分别交OA、OB于M、N，如图：



$\therefore MP=MF$，$NP=NG$，

$\therefore \triangle PMN$的周长的最小值为FG，

由轴对称的性质得：$\angle FOA=\angle AOP$，$\angle POB=\angle GOB$，

$OP=OF$，$OP=OG$，

$\because \angle AOP+\angle POB=\angle AOB=30°$，$OP=4$，

$\therefore \angle FOG=\angle FOA+\angle AOP+\angle POB+\angle GOB=60°$，$OF=OG=4$，

$\therefore\triangle FOG$ 为边长为 4 的等边三角形，

$\therefore FG=4$，

$\therefore\triangle PMN$ 的周长的最小值为 4.

故答案为：4.

三、解答题

19. 因式分解：

（1）$3x-12x^3$；

（2）x^4-7x^2+6；

（3）$\left(a^2-4a\right)^2+8\left(a^2-4a\right)+16$．

（4）$\left(3x-y\right)^2-\left(x-3y\right)^2$

【答案】（1）$3x\left(1-2x\right)\left(1+2x\right)$

（2）$\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-6\right)$

（3）$\left(a-2\right)^4$

（4）$8\left(x+y\right)\left(x-y\right)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，掌握各类分解方法是解题关键；

（1）综合提公因式和公式法分解因式；

（2）利用十字相乘法即可求解；

（3）完全平方公式分解因式；

（4）平方差公式分解因式；

【小问 1 详解】

解：原式$=3x\left(1-4x^2\right)$

$=3x\left(1-2x\right)\left(1+2x\right)$

【小问 2 详解】

解：原式$=\left(x^2-1\right)\left(x^2-6\right)$

$=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-6\right)$

【小问 3 详解】

解：原式$=\left(a^{2}-4a+4\right)^{2}$

$=\left[\left(a-2\right)^{2}\right]^{2}$

$=\left(a-2\right)^{4}$

【小问 4 详解】

解：原式$=\left(3x-y+x-3y\right)\left(3x-y-x+3y\right)$

$=\left(4x-4y\right)\left(2x+2y\right)$

$=8\left(x+y\right)\left(x-y\right)$

20. 计算：

（1）$\dfrac{x}{x^{2}-4}-\dfrac{1}{2x-4}$

（2）解方程$\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x-2}=0$

（3）先化简，再求值$\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)\div\dfrac{a^{2}-a}{a+1}$，其中$a=-\dfrac{1}{2}$

【答案】（1）$\dfrac{1}{2x+4}$

（2）$x=6$

（3）$\dfrac{1}{a-1}$，$-\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查的是分式的加减，分式方程的解法，分式的化简求值的有关知识．熟练掌握分式的混合运算，分式方程的解法是解题的关键．

(1)直接利用分式的减法的计算法则进行计算即可；

(2)先将分式方程转化为整式方程，然后再进行求解即可；

(3)先将给出的分式进行化简，然后代入求值即可．

【小问 1 详解】

解：原式$=\dfrac{2x}{2\left(x+2\right)\left(x-2\right)}-\dfrac{x+2}{2\left(x+2\right)\left(x-2\right)}$

$=\dfrac{2x-x-2}{2(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x-2}{2(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{1}{2(x+2)}$

$=\dfrac{1}{2x+4}$；

【小问 2 详解】

解：方程两边同时乘以$x(x-2)$得：$3(x-2)-2x=0$，

整理得：$3x-6-2x=0$，

$\therefore x-6=0$，

解得$x=6$，

当$x=6$时，$x(x-2)=6\times(6-2)=24\neq 0$，

$\therefore x=6$是该方程的解；

【小问 3 详解】

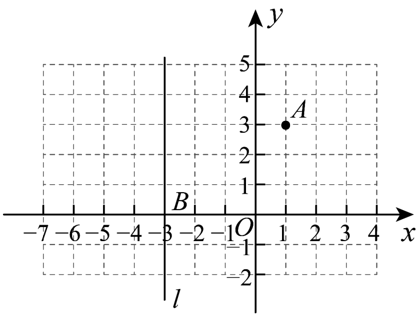
解：原式$=\dfrac{a+1-1}{a+1}\cdot\dfrac{a+1}{a^2-a}$

$=\dfrac{a}{a+1}\cdot\dfrac{a+1}{a(a-1)}$

$=\dfrac{1}{a-1}$，

把$a=-\dfrac{1}{2}$代入得：原式$=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}-1}=-\dfrac{2}{3}$.

21. 点A在平面直角坐标系中的位置如图所示，直线 经过点$B(-3,0)$且平行于y轴.



（1）写出点 A 关于 y 轴的对称点 A_1 的坐标__________；点 A 关于直线 的对称点 A_2 的坐标__________；

（2）若平面直角坐标系中有一点 $P(m,n)$，其中 $m>0$，点 P 关于 y 轴的对称点为 P_1，点 P_1 关于直线 的对称点为 P_2，求线段 P_1P_2 的长（用含 m 的式子表示）.

【答案】（1）$(-1,3)$，$(-7,3)$

（2）$6-2m$ 或 $2m-6$

【解析】

【分析】本题主要考查了坐标与图形，两点间距离求法，理解关于 y 轴对称和平行于 y 轴的直线对称的点的坐标是解答关键.

（1）根据关于 y 轴对称和平行于 y 轴的直线对称的点的坐标来求解；

（2）根据关于 y 轴对称和平行于 y 轴的直线对称的点的坐标来求出 P_1，P_2 坐标，再利用两点间距离公式求解.

【小问 1 详解】

解：由图象可知 $A(1,3)$，

$\therefore$ A 关于 y 轴的对称点 A_1 的坐标是 $(-1,3)$.

$\because$直线 经过点 $B(-3,0)$ 且平行于 y 轴

$\therefore$点 A_2 的横坐标是 $-3+(-4)=-7$，

$\therefore$点 A 关于直线 的对称点 A_2 的坐标是 $(-7,3)$.

故答案为：$(-1,3)$，$(-7,3)$.

【小问 2 详解】

解：平面直角坐标系中有一点 $P(m,n)$，其中 $m>0$，

$\therefore$点 P 关于 y 轴的对称点为 $P_1(-m,n)$.

$\because$直线 经过点 $B(-3,0)$ 且平行于 y 轴，

①当 $0<m<3$ 时，

点 P_1 关于直线 的对称点为 $P_2(-m+6,n)$，

$\therefore P_1P_2=-m+(-m+6)=6-2m$,

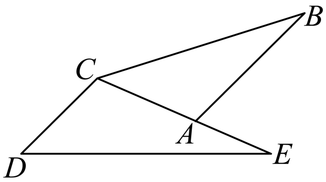
② 当 $m\le 3$ 时,

点 P_1 关于直线 的对称点为 $P_2(m-6,n)$,

$P_1P_2=m-6-(-m)=2m-6$.

综上所述,线段 P_1P_2 的长为 $6-2m$ 或 $2m-6$.

22. 如图,在 ABC 和△ CED 中,$AB=CE$,$\angle B=\angle E$,$BC=ED$.



(1)求证:$AB\parallel CD$;

(2)若 $AB=5$,$AE=2$,求 CD 的长.

【答案】(1)证明见解析

(2)

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定,平行线的判定:

(1)利用SAS 证明△ ABC≌△ CED 得到 $\angle CAB=\angle DCE$,则可证明 $AB\parallel CD$;

(2)由全等三角形的性质得到 $CD=AC$,$CE=AB=5$,则 $CD=AC=CE-AE=3$.

【小问 1 详解】

证明:在 ABC 和△ CED 中,

$$\begin{cases}AB=CE\\ \angle B=\angle E\\ BC=ED\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CED(\text{SAS})$,

$\therefore \angle CAB=\angle DCE$,

$\therefore AB\parallel CD$;

【小问 2 详解】

解:$\because \triangle ABC\cong\triangle CED$,

$\therefore CD=AC$,$CE=AB=5$,

∵ $AE = 2$，

∴ $CD = AC = CE - AE = 3$.

23. 已知 a、b、c 为△ABC 的三边长；

①b、c 满足 $(b-2)^2+|c-3|=0$，且 a 为方程$|a-4|=2$的解，求出该三角形的周长，并判断△ABC 的形状.

②若 $a=5$，$b=2$，且 c 为整数，求△ABC 的周长的最大值和最小值.

【答案】①△ABC 是等腰三角形；周长为 7；②△ABC 的周长的最大值 13，最小值 11.

【解析】

【分析】①利用绝对值的性质以及偶次方的性质得出 b，c 的值，进而利用三角形三边关系得出 a 的值，进而求出△ABC 的周长进而判断出其形状.

②利用三角形三边关系得出 c 的取值范围，进而求出△ABC 的周长最大值和最小值.

【详解】解：①∵ $(b-2)^2+|c-3|=0$，

∴$b-2=0$，$c-3=0$，

解得：$b=2$，$c=3$，

∵a 为方程$|a-4|=2$的解，

∴$a-4=\pm2$，

解得：$a=6$ 或 2，

∵a、b、c 为△ABC 的三边长，$b+c<6$，

∴$a=6$ 不合题意舍去，

∴$a=2$，

∴△ABC 的周长为：$2+2+3=7$，

∴△ABC 是等腰三角形.

②∵$a=5$，$b=2$，c 为整数，

∴$5-2<c<2+5$，

∴c 的最小值为 4，c 的最大值为 6，

∴△ABC 的周长的最大值$=5+2+6=13$，最小值$=5+2+4=11$.

【点睛】此题主要考查三角形的三边关系，解题的关键是正确理解三角形的三边关系.

24. 阅读下列解答过程，然后回答问题：

已知 x^2-7x+k 有一个因式$(x-3)$，求 k 的值.

解：设另一个因式为$(x+a)$，则

$x^2-7x+k=(x-3)(x+a)$．即

$x^2-7x+k=x^2+(a-3)x-3a$ （对任意实数 x 成立）

由此得：$\begin{cases} a-3=-7, \\ -3a=k \end{cases}$

$\therefore k=12$

（1）已知 $x^2-15x-34$ 有一个因式 $(x+2)$，则另一个因式为______________；

（2）已知 $x^2+mx-24$ 有一个因式 $(x+6)$，则 m 的值为______________；

（3）已知多项式 x^3-3x^2+k 有一个因式 $(x-2)^2$，求 k 的值．

【答案】（1）$(a-17)$

（2）2

（3）4

【解析】

【分析】题目主要考查因式分解的利用，理解题意，设出因式，运用题目中的方法求解是解题关键．

（1）利用题目中已知的方法求解即可；

（2）利用题目中已知的方法列出二元一次方程组求解即可；

（3）设另一个因式为 $(x+c)$，利用题目中已知　方法列出二元一次方程组求解即可．

【小问 1 详解】

解：设另一个因式为 $(x+a)$，则

$x^2-15x-34=(x+2)(x+a)$，

即 $x^2-15x-34=x^2+(a+2)x+2a$ （对任意实数 x 成立）

由此得 $\begin{cases} a+2=-15 \\ 2a=-34 \end{cases}$，

$\therefore a=-17$，

故答案为：$(a-17)$；

【小问 2 详解】

设另一个因式为 $(x+b)$，则

$x^2+mx-24=(x+6)(x+b)$，

即$x^2+mx-24=x^2+(b+6)x+6b$（对任意实数x成立）

由此得$\begin{cases}b+6=m\\6b=-24\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=2\\b=-4\end{cases}$，

故答案为：2；

【小问3详解】

设另一个因式为$(x+c)$，则

$x^3-3x^2+k=(x-2)^2(x+c)$，

即$x^3-3x^2+k=(x^2-4x+4)(x+c)$（对任意实数$x$成立）

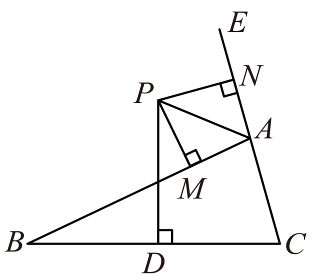
$x^3-3x^2+k=x^3-4x^2-4xc+cx^2+4x+4c=x^3+(c-4)x^2+(4-4c)x+4c$

由此得$\begin{cases}c-4=-3\\k=4c\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}c=1\\k=4\end{cases}$，

$\therefore k$的值为4.

25. 如图，ABC中，BC的垂直平分线与外角$\angle EAB$的平分线交于点P，$PM\perp AB$于M，$PN\perp AE$于N.



（1）求证：$BM=CN$；

（2）当$AB=9$，$AC=5$时，求BM和AM的长.

【答案】（1）见解析 （2）$AM=2$，$BM=7$

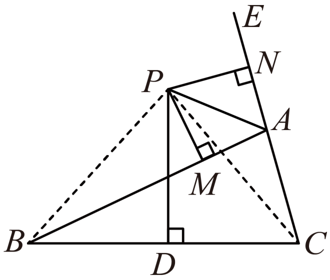
【解析】

【分析】(1) 根据角平分线性质及线段垂直平分线性质得出 $PM=PN$，$PB=PC$，利用HL证明 $Rt\triangle BPM\cong Rt\triangle CPN$，根据全等三角形的性质即可得解；

(2) 利用HL证明 $Rt\triangle APM\cong Rt\triangle APN$，结合(1)根据全等三角形的性质及线段的和差求解即可.

【小问1详解】

证明：连接 BP、CP，



$\because AP$ 平分 $\angle EAB$，$PM\perp AB$ 于 M，$PN\perp AE$ 于 N，

$\therefore PM=PN$，

$\because PD$ 垂直平分 BC，

$\therefore PB=PC$，

在 $Rt\triangle BPM$ 和 $Rt\triangle CPN$ 中，

$$\begin{cases}PB=PC\\PM=PN\end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle BPM\cong Rt\triangle CPN(\mathrm{HL})$，

$\therefore BM=CN$；

【小问2详解】

在 $Rt\triangle APM$ 和 $Rt\triangle APN$ 中，

$$\begin{cases}AP=AP\\PM=PN\end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle APM\cong Rt\triangle APN(\mathrm{HL})$，

$\therefore AM=AN$，

$\because AB=BM+AM=CN+BM=AC+AN+AM=AC+2AM$，$AB=9$，$AC=5$，

$\therefore AM=2$，

$\therefore BM=AB-AM=7$.

【点睛】此题考查了全等三角形的判定与性质，熟记全等三角形的判定定理与性质定理是解题的关键.

26. 中国交通科技领跑世界一流水平，公路网络“四通八达”，公路养护效能高，让人们对“美好出行”的需要得到很好的满足．某一段公路的维修养护工程，有甲、乙两个工程队可供选择，承包单位发现：①若由乙队单独完成全部工程所需天数是甲队单独完成全部工程所需天数的1.5倍；②若由甲队单独施工5天后，再由甲、乙两队共同施工21天可完成剩余工程；③若由两队同时进场施工完成全部工程，共需要工程费用384000，且每天的工程费用甲队比乙队多2000元.

（1）求甲、乙两个工程队单独施工完成全部工程各需要多少天?

（2）从节省工程费用的角度考虑，请你从甲，乙单独施工完成与甲、乙同时进场施工完成这三种施工方案中选择一种合适的方案？并说明理由；

（3）若要使两个工程队完成全部工程施工总费用不超过378000元，则甲工程队至少要施工多少天?

【答案】(1）甲工程队单独施工完成全部工程各需要40天，乙工程队单独施工完成全部工程各需要60天；

（2）选甲工程队单独施工完成

（3）28天

【解析】

【分析】(1）设甲施工队单独完成此项工程需x天，依据等量关系列方程求解；

（2）先根据“若由两队同时进场施工完成全部工程，共需要工程费用384000”求出甲乙队每天工程的费用，进而求出甲乙队完成全部工程的费用，比较即可得到结论；

（3）设甲工程队要施工y天，则乙工程队要施工$\left(1-\frac{y}{40}\right)\div\frac{1}{60}$天才能完成全部工程，根据两个工程队完成全部工程施工总费用不超过378000列出不等式，解不等式即可得到结论.

【小问1详解】

解：设甲施工队单独完成此项工程需x天，则乙施工队单独完成此项工程需$1.5x$天.

根据题意得$\frac{5}{x}+21\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}\right)=1$.

解这个方程得$x=40$.

经检验$x=40$是所列方程的解.

$\therefore$当$x=40$时，$1.5x=60$.

答：甲工程队单独施工完成全部工程需要40天，乙工程队单独施工完成全部工程需要60天；

【小问2详解】

解：方案为：选甲工程队单独施工完成.

理由如下：由题意可得两队同时进场施工完成全部工程所需要的天数为$1\div\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)=24$（天），

设乙队每天工程费用为a元，则甲乙队每天工程费用为$\left(a+2000\right)$元，

由题意得$24\left(a+a+2000\right)=384000$，

解得$a=7000, a+2000=9000$，

$\therefore$甲队完成全部工程费用为$9000\times40=360000$（元），乙完成全部工程费用为$7000\times60=420000$（元），

又两队同时进场施工完成全部工程共需要工程费用384000元，

$\because 360000<384000<420000$，

$\therefore$选甲工程队单独施工完成；

【小问3详解】

解：设甲工程队要施工y天，则乙工程队要施工$\left(1-\frac{y}{40}\right)\div\frac{1}{60}$天才能完成全部工程，

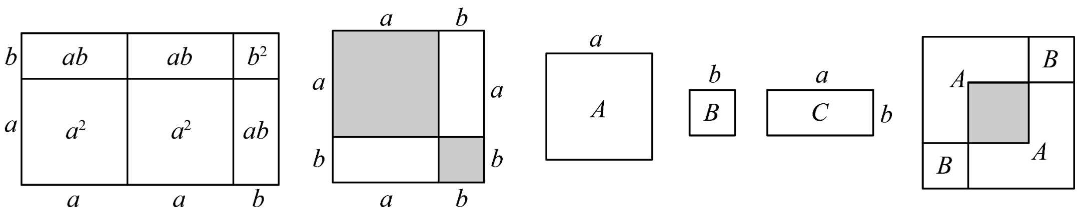
由题意得$9000y+7000\left(1-\frac{y}{40}\right)\div\frac{1}{60}\leq378000$，

解得$y\geq28$，

答：甲工程队至少要施工28天.

【点睛】本题主要考查了分式方程、一元一次方程、一元一次不等式的应用，分析题意，找到关键描述语，找到合适的等量关系或不等关系是解决问题的关键.

27."数形结合"是数学上一种重要的数学思想，在整式乘法中，我们常用图形而积来解释一些公式．如图（1），通过观察大长方形而积，可得：$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$．



(1) (2) (3) (4)

（1）如图（2），通过观察大正方形的面积，可以得到一个乘法公式，直接写出此公式；

（2）现有若干张如图（3）的三种纸片，A是边长为a的正方形，B是边长为b的正方形，C是长为a，宽为b的长方形．若要无缝无重叠拼出一个长为$(2a+b)$，宽为$(3a+2b)$的长方形，设需要A型纸片x张，

B 型纸片 y 张，C 型纸片 z 张，直接写出 $x+y+z$ 的值；

（3）图（4）是由图（3）中的两张 A 型纸片和两张 B 型纸片排成的一个正方形，其中两张 A 型纸片有重叠（图中阴影部分），直接写出阴影部分的面积（用含 a，b 的式子表示）；

（4）若图（2）也是由图（3）中的三种纸片拼成的，且图（2）中的阴影部分面积为 17，图（4）中的阴影部分面积为 8，求图（2）整个正方形的面积．

【答案】（1）$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

（2）15

（3）$(a-b)^2$

（4）26

【解析】

【分析】本题考查完全平方公式与图形面积，多项式乘多项式与图形面积问题．正确的识图，掌握数形结合的思想，是解题的关键．

（1）根据大正方形的面积等于两个阴影部分的面积加上两个长方形的面积，即可得出结果；

（2）$(2a+b)(3a+2b)$ 的积，即可得出 x,y,z 的值，进一步计算即可；

（3）根据阴影部分的面积等于两张 A 型纸片和两张 B 型纸片的面积之和减去大正方形的面积，求解即可；

（4）根据题意，得到 $(a-b)^2=8$，$a^2+b^2=17$，利用完全平方公式变形求值即可．

【小问 1 详解】

解：∵大正方形的面积等于两个阴影部分的面积加上两个长方形的面积，

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

【小问 2 详解】

$\because (2a+b)(3a+2b)=6a^2+7ab+2b^2$，

∴需要 A 型纸片 6 张，B 型纸片 2 张，C 型纸片 7 张，

即：$x=6,y=2,z=7$，

$\therefore x+y+z=6+2+7=15$；

【小问 3 详解】

$S_{阴影}=2a^2+2b^2-(a+b)^2=(a-b)^2$；

【小问 4 详解】

由题意，得：$(a-b)^2=8$，$a^2+b^2=17$，

$\therefore (a-b)^2=a^2+b^2-2ab=17-2ab=8$，

$\therefore 2ab=17-8=9$，

$\therefore a^2+b^2+2ab=17+9=26$；

即：整个正方形的面积为 26．

28. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120°$，$\angle B=\angle ADC=90°$，E，F 分别是 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=60°$，试探究图 中线段 BE，EF，FD 之间的数量关系．

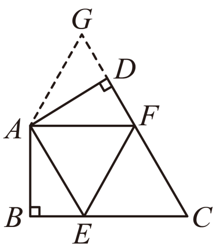


图1

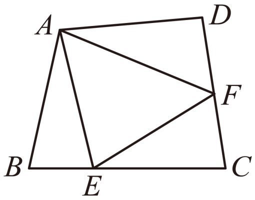


图2

（1）小亮同学认为：延长 FD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，如图 ，先证明 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$，再证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$，则可得到 BE，EF，FD 之间的数量关系：______；

（2）如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E，F 分别是 BC，CD 上的点，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由．

【答案】（1）$EF=BE+DF$

（2）仍然成立，理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，角的计算，线段关系的转化，作出对应的辅助线发现其中包含的关系是解此题的关键．

（1）通过构造辅助线的方式证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 全等，得到 $AG=AE$，$\angle GAD=\angle EAB$，从而推导 $\angle EAF=\angle GAF$，再证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 全等得到 $EF=GF$，最终通过已知条件转化线段关系得到 $EF=BE+DF$；

（2）通过构造辅助线的方式先得出 $\angle B=\angle ADG$，再证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 全等，得到 $AE=AG$，$\angle GAF=\frac{1}{2}\angle BAD=\angle EAF$，随后证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 全等，得到 $EF=FG$，最终根据条件转化可得到 $EF=BE+DF$．

【小问 1 详解】

解：延长FD到点G，使$DG=BE$，连接AG，

$\because \angle B=\angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle ADG=90^\circ$，

在$\triangle ABE$和$\triangle ADG$中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle B=\angle ADG=90^\circ \\ DG=BE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG(\mathrm{SAS})$

$\therefore AG=AE$，$\angle GAD=\angle EAB$，

$\because \angle BAD=120^\circ$，$\angle EAF=60^\circ$，

$\therefore \angle BAE+\angle DAF=60^\circ$，

$\therefore \angle GAD+\angle DAF=60^\circ$，即$\angle GAF=60^\circ$，

$\therefore \angle EAF=\angle GAF$，

在$\triangle AEF$和$\triangle AGF$中，

$$\begin{cases} AG=AE \\ \angle EAF=\angle GAF \\ AF=AF \end{cases},$$

$\therefore \quad AEF \cong \quad AGF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore EF=GF$，

又$\because GF=DF+DG=DF+BE$，

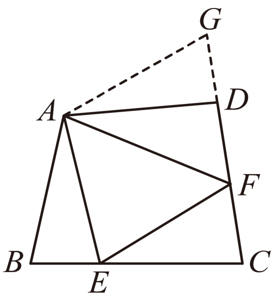
$\therefore EF=BE+DF$．

故答案为：$EF=BE+DF$；

【小问 2 详解】

解：仍然成立．

理由：如图，延长FD到点G，使$DG=BE$，连接AG，



$\because \angle B+\angle ADC=180^\circ$，$\angle ADG+\angle ADC=180^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle ADG$，

在$\triangle ABE$和$\triangle ADG$中，

$$\begin{cases} BE=DG \\ \angle B=\angle ADG \\ AB=AD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AE=AG$，$\angle BAE=\angle DAG$，

$\because \angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，

$\therefore \angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD=\angle EAF$，

在$\triangle AEF$和$\triangle AGF$中，

$$\begin{cases} AE=AG \\ \angle EAF=\angle GAF \\ AF=AF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore EF=FG$，

$\because FG=DG+DF=BE+DF$，

$\therefore EF=BE+DF$．

29. 定义：如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式，则称这个分式为“和谐分式”．如$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$，$\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2x+2-5}{x+1}=\dfrac{2x+2}{x+1}+\dfrac{-5}{x+1}=2+\dfrac{-5}{x+1}$，则$\dfrac{x+1}{x-1}$和$\dfrac{2x-3}{x+1}$都是“和谐分式”．

（1）下列分式中，属于“和谐分式”的是________（填序号）

①$\frac{x+1}{x}$；②$\frac{2+x}{2}$；③$\frac{x+2}{x+1}$；④$\frac{y^2+1}{y^2}$

（2）将“和谐分式”$\frac{a^2-2a+3}{a-1}$化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式为：

$\frac{a^2-2a+3}{a-1}=$_________$+\frac{2}{a-1}$

（3）应用：先化简$\frac{3x+6}{x+1}-\frac{x-1}{x}\div\frac{x^2-1}{x^2+2x}$，并求$x$取什么整数时，该式的值为整数.

（4）拓展：若$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$，求$A$、$B$的值.

【答案】（1）①③④　　（2）$a-1$

（3）$2+\frac{2}{x+1}$，-3

（4）$\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$

【解析】

【分析】（1）把给出的各式进行处理，根据和谐分式的定义判断；

（2）把分式先变形为$\frac{a^2-2a+1+2}{a-1}$，再写成整式与分式分子为常数的形式；

（3）先算除法，把分式转化成和谐分式，再确定 x 的值.

（4）由分式的加减运算法则可求得$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$，继而可得方程组：$\begin{cases}A+B=2\\2A-B=1\end{cases}$，解此方程组即可求得答案.

【小问 1 详解】

①$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$，是和谐分式；

②$\frac{2+x}{2}$是整式，不是和谐分式；

③$\frac{x+2}{x+1}=\frac{x+1+1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$，是和谐分式；

④$\frac{y^2+1}{y^2}=\frac{y^2}{y^2}+\frac{1}{y^2}=1+\frac{1}{y^2}$，是和谐分式；

故答案为：①③④

【小问 2 详解】

$$\frac{a^2-2a+3}{a-1}=\frac{a^2-2a+1+2}{a-1}=\frac{(a-1)^2+2}{a-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$$

故答案为：$a-1$

【小问 3 详解】

$$\frac{3x+6}{x+1}-\frac{x-1}{x}\div\frac{x^2-1}{x^2+2x}$$

$$=\frac{3x+6}{x+1}-\frac{x-1}{x}\times\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3x+6}{x+1}-\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{2x+4}{x+1}$$

$$=\frac{2(x+1)+2}{x+1}$$

$$=2+\frac{2}{x+1}$$

∴当 $x+1=\pm 1$ 或 $x+1=\pm 2$ 时，分式的值为整数

此时 $x=0$ 或-2 或 1 或-3

又∵分式有意义时 $x\neq 0$ 、1、-1

∴ $x=-3$

所以当 x=-3 时，分式运算的结果是整数.

【小问 4 详解】

$$\because \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

又 $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$

$$\therefore \begin{cases}A+B=2\\2A-B=1\end{cases}$$

解得，$\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$

【点睛】本题考查了分式的混合运算及和新定义“ 和谐分式”， 解二元一次方程组．解决本题的关键是理解定义的内容并能运用．