# 第03讲 等式与不等式的性质

**目录**

[**01 常考题型过关练**](#_Toc17943)

题型01作差法、作商法比较两数（式）的大小

题型02 利用不等式的性质判断命题真假

题型03 利用不等式的性质证明不等式

题型04 利用不等式的基本性质求代数式的取值范围

题型05 不等式的综合

[**02 核心突破提升练**](#_Toc20184)

[**03 真题溯源通关练**](#_Toc5699)

#

##  01 作差法、作商法比较两数（式）的大小

1．（多选）若，那么下列不等式一定成立的是（   ）

A． B． C． D．

【答案】ACD

【详解】对于A，因为，所以，故A正确；

对于B，，故B错误；

对于C，，，所以，因为，所以，所以，故C正确；

对于D，，故D正确.

故选：ACD.

2．假设买水两次，两次买水的价格有变动，第一次*a*元/瓶，第二次*b*元/瓶，有以下两种方案买水（假设十元钱刚好能买到整数瓶水），方案一：每次买十元钱的水，买两次；方案二：每次买十瓶水，买两次．则下列说法正确的是（    ）

A．用两种买水方案买水的花费一样

B．用“方案二”买水比较划算

C．用“方案一”买水比较划算

D．用哪种方案买水比较划算与*a*，*b*的大小有关

【答案】C

【详解】方案一：平均每瓶的价格为（元）；方案二：平均每瓶的价格为（元）．由于，故方案一比较划算．

3．每次去加油站，甲选择加固定金额的油，乙选择加固定体积的油．在油价的波动情况下，哪种方式更经济呢？（    ）

A．加固定金额的方式 B．加固定体积的方式 C．两种方案一样 D．要视具体价格而定

【答案】A

【详解】设两次加油的油价分别为，（，且），乙方案每次加油的量为；甲方案每次加油的钱数为，

则乙方案的平均油价为：，甲方案的平均油价为：，

因为，

所以，即甲方案更经济．

故选：A

4．两人共同参加一个游戏，游戏规则如下：其中一人在集合（，且）中任取2个元素并求和，剩下2个元素给另一个人并求和，和大者为胜.则先取者取下列哪2个元素能够保证先取者必胜（    ）

A．， B．， C．， D．，

【答案】C

【详解】若先取者取和，

则，

根据，且，不能确定大小关系，A错误；

若先取者取和，

则，

根据，且，不能确定大小关系，B错误；

若先取者取和，

则

，

根据，且，所以上式大于0，C正确，D错误.

故选：C

5．若，求证：．

【答案】证明见解析

【详解】证明：∵*a*>*b*>0，

∴，且．

∴作商得：．

∴．

##  02 利用不等式的性质判断命题真假

6．若，，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】因为，，所以，，所以，，故*A*正确，*B*错误；当时，，，故*C*错误，*D*错误．

7．若，，为非零实数，且，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】令，，则，，

因为此时，故A不成立；

，故B不成立；

，故D不成立；

根据不等式的基本性质：，，故C成立.

故选：C

8．下列命题是假命题的为（   ）

A．若，则 B．若，则

C．若且，则 D．若，则

【答案】A

【详解】对于A，，因，则，

又，则，故A错误；

对于B，由不等式同向可加性可知，当时，，故B正确；

对于C，，因，则，又，

则，故C正确；

对于D，，因，则，

，则，

故D正确．

故选：A

9．（多选）已知，则（    ）

A． B．

C． D．

【答案】ABD

【详解】对于A：

，又，由加法性质知，A正确,

对于B：, ,，B正确,

对于C：,

,,但是的正负号不确定,

与大小关系不确定，C错误,

对于D：,,

，又,，D正确,

故选：ABD.

10．（多选）若，且，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】BC

【详解】B选项，，

又，故，

由可得，即，

由可得，

所以，故，

由可得，即，

所以，B正确；

不妨设，满足和，

此时，，AD错误；

两边同除以得，

，，故，即，

不等式两边同除以得，

所以，C正确；

故选：BC

##  03 利用不等式的性质证明不等式

11．（多选）下列说法正确的有（　　）

A．若，则

B．若，则

C．若，则

D．若，则

【答案】AC

【详解】A中，因为，可得，所以，所以A正确；

B中，若，也可以，所以不正确，所以B不正确；

C中，，

因为，，而，所以，即，所以C正确；

D中，若，当时，则，则错误，所以D不正确．

故选：AC．

12．（1）已知，，，求证：；

（2）证明：．

【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析

【详解】（1）因为，所以．又，所以，则，所以，即．又，所以．

（2）要证，只需证，即证，即证，即证，即证，显然成立，所以．

13．已知，．

(1)求证：；

(2)求证：．

【答案】(1)证明见解析；

(2)证明见解析.

【详解】（1）由，则，故，

由，则，故，

所以，得证.

（2）由，而，

所以，即，得证.

14．设，，，证明：．

【答案】证明见解析

【详解】由题意知，，，

则有，，，①

，，，

所以．

又根据①的结论可知，，，

所以．

综上所述，.

15．已知，且，求证：

【答案】证明见解析．

【详解】因为，且，可得，，

所以，

所以，可得，

又因为，

所以，

所以，所以，

因为，由不等式的性质，可得，故．

16．已知糖水中有糖（），往糖水中加入糖（），（假设全部溶解）糖水更甜了.

(1)请将这个事实表示为一个不等式，并证明这个不等式.

(2)利用（1）的结论证明命题：“若在中*a*、*b*、*c*分别为角*A*、*B*、*C*所对的边长，则”

【答案】(1)；证明见解析；

(2)证明见解析；

【详解】（1）由题可得，；

证明：因为，，，

所以，，，从而，即

（2）由三角形三边关系，可得，而函数，为单调递增函数，

，

，，

故，

所以，

##  04 利用不等式的基本性质求代数式的取值范围

17．若，则的范围为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】因为，所以，所以，

即的范围为.

故选：A

18．已知，，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】因为，又，，所以的取值范围是．

故选：C．

19．（多选）已知且，则（   ）

A． B．

C． D．

【答案】AD

【详解】∵且，∴，即，故A正确；

取，则，故B错误；

取，则，故C错误；

∵，∴，又，∴，

∴，∴，

∵，∴，又，∴，

∴，∴，

综上，，故D正确，

故选：AD.

20．若实数*x*，*y*满足，则的取值范围是 ；若实数*x*，*y*满足，则的取值范围是 ．

【答案】  

【详解】若*x*，*y*满足，则，从而．若，设，所以解得，则有，所以．

##  05 不等式的综合

21．****（2025·云南玉溪·二模）已知，，，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】由，得，

因为，当且仅当时取等号，

所以，

因为，所以，

当时，，此时，，

这与矛盾，所以，

由，得，

所以，当且仅当时取等号，

由A选项知，当时，不符题意，

所以，

由，可得，

因为，所以，

所以，

因为，所以，所以，

由，得，

则，

因为，，

所以，

又因为，所以，所以，

综上所述，.

故选：A.

22．设集合，若，，且，，则（   ）

A． B．，

C． D．，

【答案】D

【详解】由，，则，，

则



又实数，，所以，即，A选项错误；

当，，此时，B选项错误；

由A选项知，，故当时，，C选项错误；

D选项：1.当为奇数，为奇数时，为偶数．又，因为为奇数，所以必为偶数，这与为奇数矛盾．

2.当，为整数，且其中至少有一个为偶数，则必为偶数．又，且为奇数，所以必为偶数，这与为奇数矛盾．故，不可能都为整数，即，，选项D正确．

故选：D.

23．****（2025·浙江·模拟预测）若负实数满足：对于任意，总存在，使得，则的范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】由题可知：对于任意，总存在，

使得，

所以的取值范围是的子集即可，

，

注意到，

，

因为，所以



故选：B

24．已知实数满足．

(1)求和的取值范围；

(2)证明：．

【答案】(1)； ．

(2)证明见解析

【详解】（1）因为，所以，

因为， 所以；

（2）．

因为，所以．

所以；

所以．

25．求证：．

【答案】证明见解析

【详解】‌由浓度不等式，可得，

则有，

于是，

，

因此．

证明浓度不等式：，其中，

证明：，

所以.

#

1．（多选）已知，，则下列说法正确的是（   ）

A． B． C． D．

【答案】CD

【详解】因为，，

对于A，因为，而，，故无法确定与的大小，A错；

对于B，因为，所以，B错；

对于C，由不等式的性质可得，从而，C对；

对于D，由不等式的性质可得，D对.

故选：CD.

2．已知，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】因为，所以．由于，故在不等式上同时乘以*a*得，即，因此，．

3．（2025·福建三明·三模）已知*a*，，则“”是“”的（    ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】若，则，充分性成立；

设，则有满足，

此时有，不满足，故必要性不成立，

综上所述，“”是“”的充分不必要条件.

故选：A.

4．（多选）在下列四个命题中，正确的是（    ）

A．若，则

B．若，，则

C．已知，，则

D．已知，若，，则

【答案】CD

【详解】对于A,由，故，故A错误，

对于B，由于，所以，

又，所以，

又，故，故，

因此，故B错误，

对于C,由于，结合，，

则，故C正确，

对于D, ，由于，，

故，即，故D正确，

故选：CD

5．（2025·山西·二模）从坐标平面的四个象限中取若干点，这些点中横坐标为正数的点比横坐标为负数的点多，纵坐标为正数的点比纵坐标为负数的点少，则下列对这些点的判断一定正确的是（   ）

A．第一象限点比第二象限点多 B．第二象限点比第三象限点多

C．第一象限点比第三象限点少 D．第二象限点比第四象限点少

【答案】D

【详解】设第一象限的点即横坐标为正数且纵坐标为正数的点有个，

第二象限的点即横坐标为负数且纵坐标为正数的点有个，

第三象限的点即横坐标为负数且纵坐标为负数的点有个，

第四象限的点即横坐标为正数且纵坐标为负数的点有个，

又因为横坐标为正数的点比横坐标为负数的点多，纵坐标为正数的点比纵坐标为负数的点少，

所以①，且②，

由不等式性质可知，①+②可得，即第二象限点比第四象限点少.

故选：D.

6．设，则*M*与*N*的大小关系是 ．

【答案】

【详解】因为，所以．

7．（多选）若，，，则（   ）

A． B．

C． D．

【答案】BCD

【详解】，，，



，

所以，



，

所以，所以，

所以B、C、D正确，A错误.

故选：BCD

8．已知，且．

(1)求证：；

(2)求证：．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【详解】（1）解法1  因为且，所以，且，两边取倒数得，又，则，从而得证．

解法2  因为且，所以，且，所以，即．

（2）因为且，所以，，则，，由，可得，即，所以，即．综上，．

9．求证：．

【答案】证明见解析

【详解】‌原不等式可转化为，

由浓度不等式得，

则得，

于是



两边开平方，即得．

下面证明浓度不等式，，其中，

证明：由，

所以.

#

1．（2018·全国III卷·高考真题）设，，则

A． B．

C． D．

【答案】B

【详解】分析：求出，得到的范围，进而可得结果．

详解：.





,即

又

即

故选：B.

2．（2016·全国I卷·高考真题）若，，则

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】试题分析：用特殊值法，令，，得，选项A错误，，选项B错误， ，选项D错误，

因为选项C正确，故选C．

3．（2015·浙江·高考真题）设，是实数，则“”是“”的

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】D

【详解】本题采用特殊值法：当时，，但，故是不充分条件；当时，，但，故是不必要条件.所以“”是“”的既不充分也不必要条件.故选D.