# 第04讲 基本不等式及其应用

**目录**

[**01 常考题型过关练**](#_Toc17943)

题型01 直接法求最值

题型02 配凑法求最值

题型03 二次与二次（一次）的商式求最值

题型04 “1”的代换求最值

题型05 双换元法求最值

题型06 条件等式有和有积求最值

题型07 消元法求最值

题型08 多次使用基本不等式求最值

题型09 利用基本不等式解决实际问题

题型10 基本不等式与恒成立问题

题型11 基本不等式与对勾函数

题型12 多元均值不等式

题型13 基本不等式多选题的综合

[**02 核心突破提升练**](#_Toc20184)

[**03 真题溯源通关练**](#_Toc5699)

# 

## 01 直接法求最值

1．若，且，则（   ）

A．有最小值为 B．有最大值为

C．有最小值为 D．有最大值为

【答案】D

【详解】由题意可得，当且仅当时取等号，解得.

故选：D.

2．已知正数满足，则的最小值为 .

【答案】12

【详解】因为，所以，

当且仅当，即，时等号成立，所以的最小值为12.

故答案为：12.

3．已知正数，满足，则的最大值是（   ）

A．4 B．6 C．1 D．2

【答案】D

【详解】．因为,所以,

从而，当且仅当时,等号成立,所以的最大值是2．

故选:D

4．若实数，满足，则的最小值是（ ）

A．18 B．6 C． D．

【答案】B

【详解】由于，故，

当且仅当，即时等号成立，

故选：B

5．（2025·安徽·三模）“”是“”的（   ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】时，结合基本不等式，，充分性成立；

当，时，满足，但此时，必要性不成立，

所以“”是“”的充分不必要条件.

故选:A.

## 02 配凑法求最值

6．函数的最小值是（   ）

A．7 B．1 C．5 D．

【答案】A

【详解】因为，所以，

所以．

当且仅当，即时等号成立，所以的最小值是7．

故选：A

7．已知，则的最小值为（   ）

A．3 B．4 C． D．6

【答案】A

【详解】由，得，

，

当且仅当，即时取等号，

所以的最小值为3.

故选：A

8．已知，求的最大值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】因为，所以，

所以，

当且仅当，即时等号成立，

因此取到最大值．

故选：B.

9．回答下面两题

(1)已知，求的最大值．

(2)设，求的最大值．

【答案】(1)最大值1

(2)最大值．

【详解】（1），，，

，

当且仅当，即时，等号成立．

当时，取得最大值1．

（2），，

，

当且仅当，即时，等号成立．

当时，取得最大值．

## 03 二次与二次（一次）的商式求最值

10．当时，求函数的最小值.

【答案】

【详解】因为，所以，

，

当且仅当，即时，等号成立，

所以函数的最小值为.

11．函数的值域是 ．

【答案】

【详解】当时，

当，.

若时，，当且仅当，即时等号成立，此时

，即.

若时，，当且仅当，即时等号成立，此时，即.

综上所述，函数的值域为.

故答案为：

12．（多选）下列各式中，最小值是6的有（    ）

A． B． C． D．

【答案】BD

【详解】对于选项A，由于可能为负，所以的最小值不是6，A错误；

对于B，因为，

所以，

当且仅当时等号成立，故B正确；

对于C，，当异号时其最小值应小于4，故C错误；

对于D，因为，

所以，

当且仅当时等号成立，故D正确.

故选：BD

13．关于的方程有两个相等的正根，则（    ）

A．有最大值 B．有最大值 C．有最小值 D．有最小值

【答案】B

【详解】因关于的方程有两个相等的正根，

所以，所以.

，

当且仅当时取等号，所以有最大值.

故选：B.

14．已知，且，则的最小值是（    ）

A．6 B．8 C．14 D．16

【答案】A

【详解】因为，所以.因为，所以，所以，即，

当且仅当时，等号成立，故的最小值是6.

故选：A

15．已知，且，则最大值为 ．

【答案】

【详解】解：由且，可得，代入，

又，

当且仅当，即，

又，可得，时，不等式取等，

即的最大值为，

故答案为：．

## 04 “1”的代换求最值

16．（2025·河北石家庄·一模）已知，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】，



，

当且仅当时等号成立

故选：D

17．已知，且，则的最小值是（    ）

A．6 B．12 C． D．27

【答案】C

【详解】由，，得

，当且仅当，即时取等号，

所以的最小值是.

故选：C

18．若随机变量，且，其中*m*，，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】由随机变量，且，得，

则，

当且仅当时取等号，所以的最小值为，

故选:C

19．已知，，且，则当取得最小值时，（   ）

A． B． C． D．1

【答案】A

【详解】已知，，且，

所以，

当且仅当时，即时，取得最小值，

则.

故选：A.

20．正项等差数列中，，则的最小值为（   ）

A． B．5 C． D．6

【答案】B

【详解】正项等差数列中，设公差为，

因为，所以，因为，所以，

所以，

所以

，

当且仅当，即时取等号.

故选：B

21．已知，，，则的最小值为 .

【答案】6

【详解】由，得，

当且仅当时等号成立，故的最小值为6.

故答案为：6

## 05 双换元法求最值

22．若，，且，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】因为，，则，，由题意可知，则，



，

当且仅当时，即当时，等号成立，

所以的最小值是.

故选：B.

23．已知，，且，则的最小值为 ．

【答案】

【详解】因为，所以，

又因为    ，

所以





，

当且仅当，即时等号成立，

所以的最小值为.

故答案为：

24．已知正数，，满足，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】正数，，满足，故，

令，故，，



，

，

当且仅当，即，时，等号成立，

故.

故选：D

25．已知，则的最大值为 ．已知，，且，则的最小值为

【答案】 / 

【详解】当时，，故，

当且仅当时取到等号，故的最大值为

由于，，故，

则，

当且仅当时，即时取到等号，故的最小值为.

故答案为：；.

26．若，，，则的最小值为（   ）

A．16 B．18 C．20 D．22

【答案】A

【详解】，，，则，



，

当且仅当，即时取等号，

所以所求最小值为16.

故选：A．

## 06 条件等式有和有积求最值

27．已知，，且，则的最小值为（    ）

A．4 B．8 C．16 D．32

【答案】C

【详解】由题意可知，当时等号成立，

即，

令，则

解得或舍

即，

当且仅当时，等号成立．

故选：C.

28．已知，，且，则下列说法正确的是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】对于A：由，得，当且仅当时，等号成立，

，解得，即，故A不正确；

对于B：由，得，当且仅当时，等号成立，

即，解得，或（舍去），故B错误；

对于C：，

令，，即，故C正确；

对于D，，令，，即，故D不正确，

故选：C．

29．已知，则的最小值是（    ）

A．0 B． C． D．1

【答案】A

【详解】由题设且，则，

所以，

当且仅当时取等号，

所以的最小值是0.

故选：A

30．设为正实数，若，，则的取值范围为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】由，得，

由，且为正实数，所以，

于是，故，

所以，所以，

解得.

故选：A

## 07 消元法求最值

31．实数，，满足，则的最小值为（   ）

A．1 B．0 C． D．

【答案】A

【详解】根据题意有，故，

当且仅当，即时取等号．

故选：A.

32．若正数*a*，*b*满足，则的最小值是（    ）

A．15 B．18 C．24 D．36

【答案】B

【详解】由，得，

则，

∴，

当且仅当，即时等号成立．

∴的最小值是18.

故选：B

33．已知，且是方程的一个根，则的最小值是（   ）

A． B．4 C．2 D．8

【答案】D

【详解】由是方程的一个根可得，

即，且，

所以，

当且仅当，即时等号成立，

故的最小值是8．

故选：D．

34．已知，满足，则的最小值是（   ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】由，可得，

由，可得且，解得，

则，

当且仅当，即时，等号成立，

所以的最小值为．

故选：B

35．若实数，满足，则的最小值为 .

【答案】1

【详解】因，则，

由，当且仅当，时等号成立，

即当，时，取得最小值2，

又因是单调增函数，故此时取得最小值为1.

故答案为：1.

36．设正实数满足，则当取得最大值时，的最大值为（    ）

A．9 B．1 C． D．4

【答案】D

【详解】由题意可知，，

所以，

因为，所以，当，即时，等号成立，

此时取最大值为1，，

所以，

当时，上式取得最大值4，所以的最大值为4.

故选：D

## 08 多次使用基本不等式求最值

37．（2025·天津红桥·一模）已知，则的最小值为（    ）

A． B． C．4 D．2

【答案】D

【详解】因为，

所以，

当且仅当，且，即时，取等号，

所以的最小值为2.

故选：D.

38．函数的最小值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】（当且仅当，即时等号成立），

（当且仅当，即时等号成立）.

两个等号可以同时成立，的最小值为.

故选：C.

39．是不同时为0的实数，则的最大值为 ．

【答案】

【详解】,

，

当且仅当时取等号，所以

的最大值为．

故答案为：．

40．已知，且，则的最小值为 ，此时 ．

【答案】 12 或1

【详解】由题设，则，

又，当且仅当时等号成立，

所以，当且仅当时等号成立，

此时，可得，故或时等号成立.

综上，或时目标式取最小值为12.

故答案为：12；或1

## 09 利用基本不等式解决实际问题

41．一批货物随17列货车从*A*市以的速度匀速直达*B*市，已知两地铁路线长，为了安全，两列货车的间距不得小于，那么这批货物全部运到*B*市，最快需要（   ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】设这批货物从*A*市全部运到*B*市的时间为*t*小时，则，当且仅当，即时等号成立．

42．道路通行能力指单位时间（1小时）内通过道路上指定断面的最大车辆数，是度量道路疏导交通能力的指标.同时为了行驶安全，车辆之间必须保持一定的安全距离.为了研究某城市道路通行能力，现给出如下假设：

假设1：车身长度均为4.8米；

假设2：所有车辆以相同的速度（单位：千米／小时）匀速行驶；

假设3：安全距离（单位：米）与车辆速度近似满足.

该城市道路通行能力的最大值约为 .（结果保留整数）

【答案】821

【详解】1小时秒，车辆速度（千米／小时）换算为米／秒是米／秒.

1小时内通过的车辆数

.

根据基本不等式（），，

当且仅当时等号成立.所以，

即该城市道路通行能力的最大值约为821.

故答案为：821.

43．年冬天新冠疫情卷土重来，我国大量城市和地区遭受了奥密克戎新冠病毒的袭击.为了控制疫情，某单位购入了一种新型的空气消毒剂用于环境消毒，已知在一定范围内，每喷洒个单位的消毒剂，空气中释放的浓度（单位：毫克/立方米）随着时间（单位：小时）变化的关系如下：当时，；当时，.若多次喷洒，则某一时刻空气中的消毒剂浓度为每次投放的消毒剂在相应时刻所释放的浓度之和.由实验知，当空气中消毒剂的浓度不低于毫克立方米时，它才能起到杀灭空气中的病毒的作用.

(1)一次喷洒个单位的消毒剂，则有效杀灭时间可达几小时？

(2)若第一次喷洒个单位的消毒剂，小时后再喷洒个单位的消毒剂，要使接下来的小时中能够持续有效消毒，试求的最小值．（精确到，参考数据：取）

【答案】(1)小时

(2)

【详解】（1）因为一次喷洒个单位的消毒剂，

所以浓度.

则当时，令，解得，故；

当时，令，解得，故，

综上，.

故若一次喷洒个单位消毒的消毒剂，则有效消毒时间可达小时.

（2）设从第一次喷洒起，经小时后，

浓度，

因为，，所以由基本不等式可得

，

当且仅当，即时，等号成立，有最小值为.

令，解得.

又，所以，

所以的最小值为.

44．某工厂某种产品的年固定成本为250万元，每生产千件，需另投入的成本为.当年产量不足80千件时，（万元）；当年产量不小于80千件时，（万元）.每件商品的售价为0.05万元.通过市场分析，该厂生产的商品能全部售完.

(1)写出年利润（万元）关于年产量（千件）的函数解析式；

(2)当年产量为多少千件时，该厂在这一商品的生产中所获利润最大?

【答案】(1)

(2)100千件，1000万元

【详解】（1）因为每件商品售价为0.05万元，

所以千件商品的销售额为（万元）.

依题意得当时，；

当时，.

所以；

（2）当时，



当时，取得最大值（万元）.

当时，.

当且仅当，即时，取得最大值1000万元.

由于，所以当年产量为100千件时，

该厂在这一商品生产中所获利润最大，最大利润为1000万元.

## 10 基本不等式与恒成立问题

45．若关于*x*的不等式对任意恒成立，则正实数*a*的可能值为（    ）

A．4 B．5 C．6 D．7

【答案】A

【详解】∵，则，

原题意等价于对任意恒成立，

由，，则，

可得，

当且仅当，即时取得等号，

∴，解得．

故正实数的取值集合为.

故选：A．

46．已知，，若不等式恒成立，则实数的最大值为（    ）

A．64 B．25 C．13 D．12

【答案】B

【详解】，，则，

不等式 恒成立，即恒成立，

，

当且仅当，即时等号成立，

所以，即实数*m*的最大值为.

故选：B.

47．已知实数且，若恒成立，则满足条件的整数的个数是（    ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】A

【详解】因为，，且，

所以

，当且仅当，即时等号成立，

所以，即，解得，

所以整数可取、，共个.

故选：A

48．已知，，且，若不等式恒成立，则的最大值为 .

【答案】8

【详解】由，

因为，，所以有，

当且仅当时取等号，

所以有，

故答案为：.

49．若不等式对一切正数*x*，*y*恒成立，则实数*t*的取值范围为 .

【答案】

【详解】不等式对一切正数*x*，*y*恒成立当且仅当不等式对一切正数*x*，*y*恒成立，

令，所以恒成立，

所以不妨让，

则

，等号成立当且仅当，

综上所述，当时，有最大值1，

所以的取值范围为.

故答案为：.

50．已知函数为偶函数．

(1)求的值；

(2)若恒成立，求实数的取值范围．

【答案】(1)

(2)

【详解】（1）因为函数的定义域为，且为偶函数．

则，即，解得，此时，，

则，即函数为偶函数，故.

（2）因为，

当且仅当时，即当时，等号成立，故函数的最大值为，

因为恒成立，则，即，

解得或，即实数的取值范围是.

## 11 基本不等式与对勾函数

51．已知，则的最小值为（    ）

A．1 B． C．2 D．

【答案】D

【详解】令，则，

而函数在上单调递增，

所以当，即时，取得最小值.

故选：D

52．函数的值域为 ．

【答案】

【详解】，

令，则时，，

，函数在上单调递减，

若，则，

若，则，

故函数值域为．

故答案为：.

53．“”是“在上恒成立”的（    ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】根据题意，若在上恒成立，

所以，在上恒成立，

由“对勾函数”可知，函数在上单调递增，

所以，当时，，可得，

所以，在上恒成立“的充要条件是”“，

因为，

因此，“”是“在上恒成立”的充分不必要条件.

故选：A.

54．若，不等式恒成立，则的取值范围为 ．

【答案】

【详解】，因此由得，

由对勾函数性质知函数在上递减，在上递增，

时，，时，，因此时，的最大值是，

所以，即的范围是．

故答案为：

55．（多选）已知函数在上的最大值比最小值大1，则正数的值可以是（    ）

A．2 B． C． D．

【答案】AD

【详解】函数在上单调递减，在上单调递增，

当时，函数在上单调递增，所以，

，所以，解得或（舍去）；

当时，函数在上单调递减，所以，

，所以，解得（舍去）；

当时，函数在上单调递减，在上单调递增，

所以，且，，

若，即，则，解得（舍去）或（舍去）；

若，即，则，解得或（舍去）.

综上所述，或.

故选：AD.

## 12 多元均值不等式

56．函数的最小值为 ．

【答案】9

【详解】∵，∴，

当且仅当，即时等号成立，

故函数的最小值为9．

故答案为：9．

57．已知正数满足,则的最大值是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】解:由题知,

,

当且仅当时取等号,

所以．

故选:C．

58．已知，则的最小值为 ．

【答案】

【详解】因为，

所以，

当且仅当，即时，等号成立，

故的最小值为.

故答案为：

59．设*a*，*b*，*c*均为正数，求证：．

【答案】证明见解析

【详解】∵*a*，*b*，*c*均为正数，

∴，

当且仅当，即时，等号成立．

，

当且仅当，即时，等号成立．

∴，

故，

当且仅当时，等号成立．

## 13 基本不等式多选题的综合

60．（2025·浙江·三模）（多选）已知，，则下列说法正确的是（   ）

A．若，则

B．的最小值为1

C．若，则的最小值为8

D．若恒成立，则的最小值为

【答案】AC

【详解】对于A，，当且仅当时取等号，

即，得到，解得．故A正确；

对于B，，

当且仅当，即时取等号，显然的值不存在，故B错误；

对于C，因为，所以，

由基本不等式得，

当且仅当时取等，此时解得，

则的最小值为8，故C正确，

对于D，因为恒成立，且，，

所以恒成立，而

，

令，则可化为，

令，则，

化简得，

而该一元二次方程一定有实数根，得到，

解得，当时，，

故，故即，

得到，则的最小值为，故D错误.

故选：AC

61．（多选）已知正数满足，则（   ）

A．的最小值为 B．的最小值为

C．的最小值为 D．的最小值为

【答案】BC

【详解】对于选项A，因为，且，所以，当且仅当时取等号，

令，得到，解得或（舍），所以，故选项A错误，

对于选项B，，且，所以，当且仅当时取等号，

所以，解得或（舍），所以选项B正确，

对于选项C，因为，由选项A知，

所以，得到，故选项C正确，

对于选项D，因为，当且仅当取等号，

由，且，得到，

所以，又，

则，当且仅当,时，取等号，

又，所以，又，所以选项D错误，

故选：BC.

【点晴】方法点晴：在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误．

62．（多选）已知实数，满足，则下列结论正确的是（   ）

A． B．

C．的最小值为 D．的最大值为

【答案】ABD

【详解】由，得．

因为，，所以，即，

解得（当时取等号），A正确；

由，得，

所以

（当，时取等号），B正确；

（当时取等号），C错误；

因为，又，

所以，所以（当时取等号），D正确．

故选：ABD

63．（多选）已知且满足，则下列结论正确的是（    ）

A． B． C． D．

【答案】ACD

【详解】根据题意:

 ，

，

，又，，

，

对A，，则，

当且仅当且，即时等号成立，A正确；

对B，，

当且仅当且，即时等号成立，B错误；

对C，由，又，

故，所以，当且仅当时等号成立，C正确；

对D，，

当且仅当且，即时等号成立，D正确.

故选：ACD.

64．（多选）已知，，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】BCD

【详解】由，得，

所以.

A：因为，所以，

当且仅当即时，等号成立，所以，故A错误；

B：因为，所以，

又，所以，即，故B正确；

C：因为，所以，

当且仅当即时，等号成立，所以，故C正确；

D：，

当且仅当即时，等号成立，所以，故D正确.

故选：BCD

# 

1．若正实数满足：则最小值是 .

【答案】

【详解】因为

所以，（当且仅当，即时取等号）

因此即

即当时，取最小值，为，

故答案为：.

2．集合中最小的元素是 .

【答案】/

【详解】因为，

所以集合中的最小元素等于的最小值，其中，

又，

因为，

由基本不等式可得，当且仅当时等号成立，

所以当时，取最小值，最小值为，

所以集合中最小的元素是.

故答案为：.

3．已知函数，，若，则的最小值为（　　）

A．9 B． C．3 D．

【答案】B

【详解】由题设，又，得，

整理得，且，则，

u所以，当且仅当，即时取等号，

所以的最小值为．

故选：B

4．定义在上的奇函数和偶函数满足，则的最小值为（   ）

A．2 B． C． D．

【答案】D

【详解】

因为函数，分别为上的奇函数和偶函数，

所以.

所以，

由（当且仅当时取“”）.

所以.

故选：D

5．对一切*x*，，都有，则实数*a*的最小值是（   ）

A．8 B．9 C．10 D．前3个答案都不对

【答案】B

【详解】因为*x*，，所以，所以，

又，

当且仅当时，取等号，所以，

所以实数*a*的最小值是.

故选：B.

6． ****记为两数的最大值，当正数（）变化时，的最小值为（ ）

A．3 B．4 C．5 D．6

【答案】B

【详解】由，可得，，

，

当正数（）时，

，

当且仅当，即时等号成立，

故，则，

当且仅当，即时等号成立，

所以的最小值为.

故选：B.

7．已知：，求：

(1)的最小值；

(2)，恒成立，求实数的取值范围.

【答案】(1)

(2)

【详解】（1），

，当且仅当时等号成立，

，

或（舍去），

则的最小值为4.

（2），

当且仅当，即时等号成立，



即，

∴

8．若正实数满足，则的最大值是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】由，

又因为，所以，

即得，

所以当且仅当时取等号，

所以，所以的最大值是

故选：B.

9．当时，恒成立，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】当，时，，

当且仅当，即时，等号成立，

所以的最大值为．

所以，即．

故选：A.

# 

1．（2025·北京·高考真题）已知，则（   ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【详解】对于A,当时，，故A错误；

对于BD，取，此时，

，故BD错误；

对于C，由基本不等式可得，故C正确.

故选：C.

2．（2025·上海·高考真题）设，则的最小值为 ．

【答案】4

【详解】易知，

当且仅当，即时取得最小值.

故答案为：4

3．（2020·天津·高考真题）已知，且，则的最小值为 ．

【答案】4

【详解】，,

，当且仅当=4时取等号，

结合,解得，或时，等号成立.

故答案为：

【点睛】本题考查应用基本不等式求最值，“1”的合理变换是解题的关键，属于基础题.

4．（2020·江苏·高考真题）已知，则的最小值是 ．

【答案】

【详解】∵

∴且

∴，当且仅当，即时取等号.

∴的最小值为.

故答案为：.