**第04讲 数列的通项公式学科网 xQ/xqX84EnXNAx1ODbqMbQ==学科网 xQ/xqX84EnXNAx1ODbqMbQ==学科网 xQ/xqX84EnXNAx1ODbqMbQ==**

**目录**

**01**[[考情解码・命题预警 2](#_Toc199181714)](#_Toc3048)

[02体系构建·思维可视 3](#_Toc21629)

[03核心突破·靶向攻坚 4](#_Toc26288)

[知能解码 4](#_Toc8047)

[知识点1 利用与的关系求通项 4](#_Toc19871)

[知识点2 累加法 5](#_Toc1660)

[知识点3 累乘法 5](#_Toc27531)

[知识点4 构造法 6](#_Toc16282)

[知识点5 倒数法 7](#_Toc25387)

[知识点6 递推关系式法 8](#_Toc23791)

[题型破译 8](#_Toc14121)

[题型1 法 8](#_Toc13080)

[题型2 累加法 10](#_Toc15335)

【方法技巧】累加法求解模型

[题型3 累乘法 12](#_Toc5721)

【方法技巧】累乘法求解模型

[题型4 形如 14](#_Toc10323)

【方法技巧】常考构造法模型

[题型5 形如 15](#_Toc20126)

[题型6 形如  16](#_Toc18051)

[题型7 倒数法 18](#_Toc24631)

[题型8 形如 19](#_Toc2532)

[题型9 利用前n项积求通项 21](#_Toc30638)

[**04真题溯源·考向感知** 22](#_Toc16460)

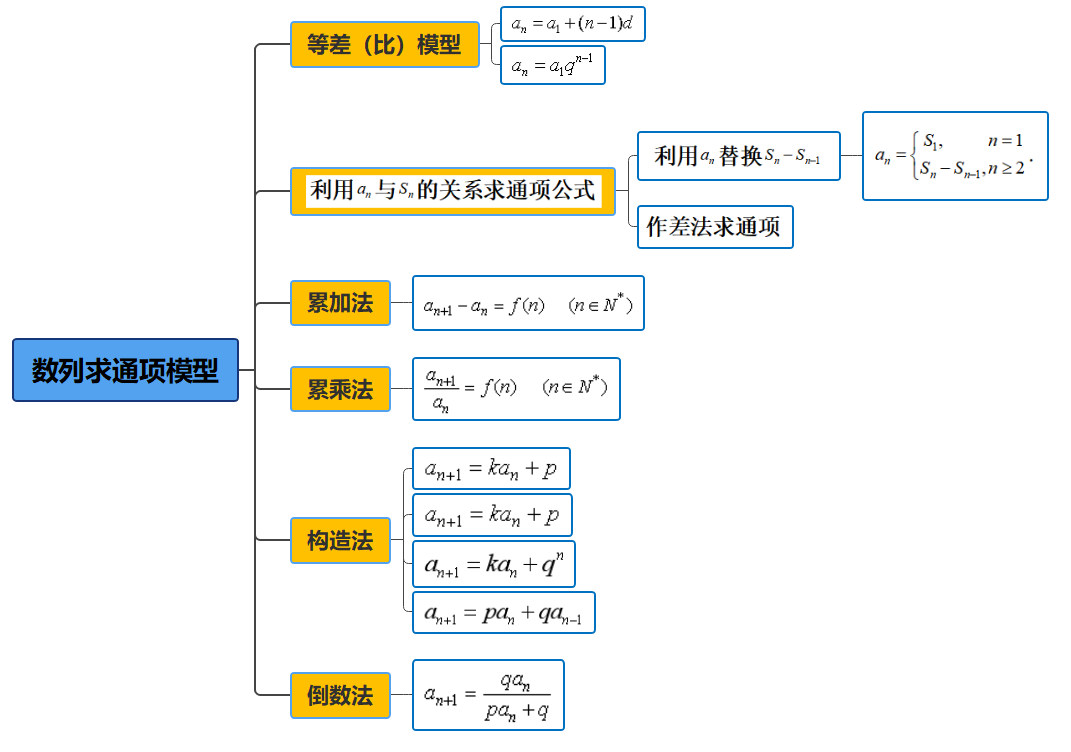
**05课本典例·高考素材** [24](#_Toc31027)

# 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点要求** | **考察形式** | **2025年** | **2024年** | **2023年** |
| （1）熟练掌握与的关系求通项公式  （2）累加法；累乘法  （3）能灵活应用构造法 | 🗹单选题  🞎多选题  🞎填空题  🗹解答题 | / | 全国甲卷（理）T18（1），（5分）  全国甲卷（文）T17（1），（5分） | 全国甲卷（理）T17（1），（5分）  全国I卷T21（2），（5分） |
| 考情分析：高考对数列通项的考查相对稳定，考查内容、频率、题型、难度均变化不大．数列通项问题以解答题的形式为主，偶尔出现在选择填空题当中，常结合函数、不等式综合考查. | | | | | |
| 复习目标：掌握数列通项的几种常见方法． | | | | | |

# 

# 



# 

## 

### [知识点1 利用与的关系求通项](#_Toc25045)

对于数列，前项和记为；

①；②

1. ②：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 法归类 | | |
| 角度1：已知与的关系；或与的关系 | 用，得到 | 例子：已知，求 |
| 角度2：已知与的关系；或与的关系 | 替换题目中的 | 例子：已知；  已知 |
| 角度3：已知等式中左侧含有： | 作差法（类似） | 例子：已知求 |

自主检测已知数列满足，则数列的通项公式为 .

【答案】

【详解】由题意，

当时，，两式相减得，

，解得，

在中，令，可得，故也满足，

综上所述，所求即为.

故答案为：.

### [知识点2 累加法](#_Toc25045)

若数列满足，则称数列为“变差数列”，求变差数列的通项时，利用恒等式求通项公式的方法称为累加法。

自主检测若数列满足（且），，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】由，可得：

，累计可得：，

故选：D.

### [知识点3 累乘法](#_Toc25045)

若数列满足，则称数列为“变比数列”，求变比数列的通项时，利用求通项公式的方法称为累乘法。

自主检测已知数列满足，则数列的通项公式为 ．

【答案】

【详解】当时，有，故，

则有，．

上述个式子累乘得 ．

因为，所以，

而当时，，也满足上式，

故数列的通项公式为．

故答案为：.

### [知识点4 构造法](#_Toc25045)

**（一）形如****（其中****均为常数且****）型的递推式：**

（1）若时，数列{}为等差数列；

（2）若时，数列{}为等比数列；

（3）若且时，数列{}为线性递推数列，其通项可通过待定系数法构造等比数列来求．方法有如下两种：

法一：设，展开移项整理得，与题设比较系数（待定系数法）得，即构成以为首项，以为公比的等比数列．再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

法二：由得两式相减并整理得即构成以为首项，以为公比的等比数列．求出的通项再转化为类型Ⅲ（累加法）便可求出

**（二）形如****型的递推式：**

（1）当为一次函数类型（即等差数列）时：

法一：设，通过待定系数法确定的值，转化成以为首项，以为公比的等比数列，再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

（2）当为指数函数类型（即等比数列）时：

法一：设，通过待定系数法确定的值，转化成以为首项，以为公比的等比数列，再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得

法二：递推公式为（其中*p*，*q*均为常数）或（其中*p*，*q*， *r*均为常数）时，要先在原递推公式两边同时除以，得：，引入辅助数列（其中），得：再应用类型Ⅴ㈠的方法解决．

自主检测数列中，，，则通项 ．

【答案】

【详解】数列中，由，得，而，

因此数列是首项为，公比为3的等比数列，则，

所以.

故答案为：

### [知识点5 倒数法](#_Toc25045)

类型1：形如（为常数，）的数列，通过两边取“倒”，变形为，即：，从而构造出新的等差数列，先求出的通项，即可求得.

类型2：形如（为常数，，，）的数列，通过两边取“倒”，变形为，可通过换元：，化简为：（此类型符构造法类型1： 用“待定系数法”构造等比数列：形如（为常数，）的数列，可用“待定系数法”将原等式变形为（其中：），由此构造出新的等比数列，先求出的通项，从而求出数列的通项公式.）

自主检测已知数列|中，，，则满足的*n*的最小值为 .

【答案】13

【详解】由，得，则．

因为，所以，所以是首项为，公比为的等比数列，

所以.

由，可得，所以，

即，又，，故满足的*n*的最小值为13.

故答案为：13.

### [知识点6 递推关系式法](#_Toc25045)

形如型的递推式：

用待定系数法，化为特殊数列的形式求解．方法为：设，比较系数得，可解得，于是是公比为的等比数列，这样就化归为型．

总之，求数列通项公式可根据数列特点采用以上不同方法求解，对不能转化为以上方法求解的数列，可用归纳、猜想、证明方法求出数列通项公式

自主检测已知数列满足，且，求 ．

【答案】

【详解】因为，可得，

即，所以，

所以是以为首项，2为公比的等比数列，

所以，所以，

所以数列是常数数列，，所以，

## 

### 题型1 法

例1-1已知数列的各项均为正，为数列的前项和，.

(1)求的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）因为，则，即，

解得：或（舍），

当时，由可得，

上述两个等式作差可得，

整理可得，

又因为数列的各项均为正，所以，

所以数列是首项为，公差为的等差数列，

所以数列的通项公式.

例1-2已知数列满足，则的通项公式为 .

【答案】

【详解】数列中，，

当时，，

两式相减得，解得，而，即满足上式，

所以的通项公式为.

故答案为：

【变式训练1-1**·变考法**】数列满足，则 ；

【答案】

【详解】解法一：由，得．①

当时，，所以．

当时，有．②

①－②得，即．

因为符合，所以，

【变式训练1-2】已知数列的首项为1，其前项和为，且满足.

(1)求数列的通项公式.

【答案】(1)

(2)证明见解析

【详解】（1），①

当时，，②

①-②，得，

两边同时除以，得.

当时，.

，

，解得，

此时，也满足，

数列是以为首项，1为公差的等差数列，

，即.

【变式训练1-3】数列是递增数列，其前项和为，且．

(1)求；

【答案】(1)，

【详解】（1）由得，．

两式相减得：，即，

因为是递增数列，所以，

由，得，所以是首项为，公差为的等差数列，

所以，；

### 题型2 累加法

例2-1已知数列的前项和为，且，，则 .

【答案】

【详解】数列中，由，得当时，，

则，

显然满足上式，因此，

所以.

故答案为：

例2-2已知数列满足，，则的最小值为

【答案】9

【详解】由已知可得，，

所以当时，有.

则有

，

，

，

，

两边分别相加可得， ，

所以.

当时，满足条件.

所以，，

所以.

设，

根据对勾函数的性质可知，当时，单调递减；当时，单调递增.

又，，

所以，当或时，有最小值为9.

故答案为：9.

**方法技巧 累加法求解模型**

若数列满足，则称数列为“变差数列”，求变差数列的通项时，利用恒等式求通项公式的方法称为累加法。



【变式训练2-1】在数列中，，且，则 .

【答案】5

【详解】

，

，

…

，

各式累加得.

故答案为：5.

【变式训练2-2】数列满足，，则 ．

【答案】3

【分析】利用累加法即可得到答案.

【详解】因为，

所以当时，有，

因此有：，

即

，

当时，适合上式，

所以，

故答案为：3.

【变式训练2-3】已知数列满足：，，数列的前项和为，则满足的的最小取值为 .

【答案】

【详解】因为数列满足：，，

当时，，

也满足，则，

所以，，

由可得，故满足条件的的最小值为.

故答案为：.

### **题型3 累乘法**

例3-1在数列中，首项，时，，则数列的前项和为 .

【答案】/

【详解】在数列中，首项，时，，

即当时，，

所以，，，，，

上述等式全部相乘得，则，

也满足，故对任意的，，

所以，，

所以数列的前和为.

故答案为：.

例3-2已知数列满足，，则的通项公式为 ．

【答案】

【详解】因为数列满足，，则，

所以，当时，，

也满足，所以，对任意的，．

故答案为：

**方法技巧 累乘法求解模型**

若数列满足，则称数列为“变比数列”，求变比数列的通项时，利用求通项公式的方法称为累乘法。



【变式训练3-1**·变考法**】在数列中，，则 .

【答案】6

【详解】因，故有，

即得，所以.

故答案为：6.

【变式训练3-2】已知中，，，则数列的通项公式是 ．

【答案】

【详解】由，可得：，又，

∴＝．

∴．

故答案为：

【变式训练3-3】已知数列满足：，且，则 .

【答案】8082

【详解】由，可得，

所以，

则当时，，当时，也符合上式，

所以，

所以.

故答案为：8082

### 题型4 形如

例4-1在数列中，，，，则该数列的通项公式 ．

【答案】

【详解】因为数列中，，即，

故数列是首项为，公比为的等比数列，

则，解得.

故答案为：.

例4-2数列 满足，，则 ．

【答案】

【详解】解：，，

数列公比为，首项为的等比数列，

，即，

．

故答案为：．

**方法技巧 构造法常考模型**

形如（其中均为常数且）型的递推式：

设，展开移项整理得，与题设比较系数（待定系数法）得，即构成以为首项，以为公比的等比数列．再利用等比数列的通项公式求出的通项整理可得



【变式训练4-1】已知数列满足，，则 ．

【答案】

【详解】由得，又，

所以，即是等比数列，

所以，即．

故答案为：．

【变式训练4-2】数列满足，且，则 ．

【答案】15

【详解】∵，∴，

又∵，

∴数列是以1为首项，公比为4的等比数列，

∴，∴，

又∵满足上式，∴，∴，

故答案为：15．

【变式训练4-3】已知数列满足，且，则的通项公式为 .

【答案】

【详解】设，即，所以，解得，

所以，

所以是首项为，公比为的等比数列，

所以，

所以．

故答案为：

### 题型5 形如

例5-1已知数列满足，，，则数列的通项公式为 ．

【答案】

【详解】由，，，可得，

所以是以3为首项、3为公比的等比数列，所以，

则，；

故答案为：.

例5-2已知数列满足，且，则数列的通项公式 ．

【答案】

【详解】∵，

∴，

即．又，，

∴数列是以3为首项，1为公差的等差数列，

∴，

∴数列的通项公式．

故答案为：.

【变式训练5-1】数列{*an*}满足，，则数列{*an*}的通项公式为 .

【答案】．

【详解】∵，所以，即，

∴是等差数列，而，

所以，

所以．

故答案为：．

【变式训练5-2】各项均正的数列满足，则等于

【答案】

【详解】将两边同除以，得，则是首项为2，公差为1的等差数列，∴，则．

故答案为：．

【点睛】本题主要考查利用构造法求数列的通项公式以及等差数列的定义的应用，属于基础题．

【变式训练5-3】已知数列满足，且，则数列的通项公式为 ．

【答案】

【详解】将两边同时除以，得，即．

由等差数列的定义知，数列是以为首项，为公差的等差数列，

所以，故．

故答案为：.

### C:\Users\DELL\AppData\Local\Temp\ksohtml24676\wps2.jpg题型6 形如

例6-1在数列中，已知，且 ，则该数列的通项公式为 .

【答案】

【详解】令，

则，

由条件得，解得，

即，

故数列是首项为，公比为4的等比数列，

从而，故.

故答案为：.

例6-2已知数列满足，且，，则数列的通项公式为 .

【答案】

【详解】法一：因为，所以.

设，则，所以.

设，则.

因为，，所以，，

所以，即，即，所以.

因为，所以数列是首项为2，公比为2的等比数列，

所以，.

法二：因为，所以，

由，，得，，

所以数列的奇数项是首项为2，公比为4的等比数列，偶数项是首项为4，公比为4的等比数列，

当为奇数时，，即；

当为偶数时，，即.

综上，.

故答案为：

【变式训练6-1】在数列中，，且，则的通项公式为 ．

【答案】

【详解】因为，设，其中、，

整理可得，

所以，，解得，所以，，

且，所以，数列是首项为，公比也为的等比数列，

所以，，解得.

故答案为：.

【变式训练6-2】设数列满足，，则数列的通项公式为 .

【答案】

【详解】设，化简后得，

与原递推式比较，对应项的系数相等，得，解得，

即，令，则，又，

故，，得.

故答案为：

### 题型7 倒数法

例7-1已知数列满足，，，则 .

【答案】

【详解】数列中，，，显然，取倒数得，

即，则数列是首项为1，公差为4的等差数列，

因此，所以.

故答案为：.

例7-2已知数列满足，，若，则数列的通项公式为 ．

【答案】

【详解】因为，

所以，

所以，

而，且，

数列是首项为1，公比为2的等比数列，

.

故答案为：

【变式训练7-1】数列中，对所有正整数都成立且，则 .

【答案】

【详解】解：由于数列中，，

所以，

即（常数），

所以数列是以为首项，为公差的等差数列．

所以（首项符合通项），

故．

故答案为：．

【变式训练7-2**·变考法**】已知数列满足，则数列的前8项和 ．

【答案】502

【详解】由，取倒数得，

所以，

因为，所以，所以，

所以是首项为2，公比为2的等比数列，

所以，则，

所以数列的前8项和.

故答案为：502

【变式训练7-3】已知数列的前项和为，若，且，则 ．

【答案】

【详解】由 ，

即，因为，

所以数列是首项为，公比为的等比数列，

即，所以．

故答案为：

### **题型8 形如**

例8-1已知数列满足：，，.

(1)求数列的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）解：因为，所以，

因为，可得，所以，

所以数列是以3为首项，公比为2的等比数列，所以，

可得，即，

所以数列表示首项为，公差为的等差数列，

可得，所以.

例8-2已知数列满足.

(1)证明：数列是等比数列，并指出其首项及公比；

(2)求数列的通项公式．

【答案】(1)证明见解析，首项为2，公比为2.

(2)

【详解】（1），

，

，，

数列是以为首项，为公比的等比数列；

（2）由（1）得，

当时，，

当时，也满足上式，

故

【变式训练8-1】已知数列满足，且，，，则数列的前10项和为 .

【答案】2036

【详解】因为，且，

所以，

所以数列是首项为，公比为2的等比数列，

所以，

所以，

所以数列的前10项和为：

.

故答案为：

【变式训练8-2】2．已知数列中，，且满足，则 ．

【答案】

【详解】由题意可得，即，

又，所以是首项为，公比为的等比数列，

所以，则，

又，所以为首项为2，公差为1的等差数列，则，

则．

故答案为：

### C:\Users\DELL\AppData\Local\Temp\ksohtml24676\wps2.jpg题型9 利用前n项积求通项

例9-1若数列的前项积，则的最大值与最小值之和为（    ）

A． B． C．2 D．

【答案】C

【详解】∵数列的前项积，

当时，，

当时，，，

时也适合上式，

∴，

∴当时，数列单调递减，且 ，当时，数列单调递减，且 ，

故的最大值为，最小值为，

∴的最大值与最小值之和为2.

故选：C.

例9-2记为数列的前项积，已知，，求数列的通项公式

【答案】

【详解】由题意可得，因为，

所以，即，

所以．

又，，所以，

故是以为首项，为公差的等差数列，.

【变式训练9-1】已知数列的前项积，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】，，又，

，.

.

故选：C.

【变式训练9-2】记为正项数列的前项积，且，，.

(1)求数列的通项公式；

【答案】(1)

(2)

【详解】（1）由可得，，即，

又∵，∴是首项为2，公比为2的等比数列，

∴；

# 

1．（2024·全国甲卷·高考真题）已知等比数列的前项和为，且.

(1)求的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）因为,故，

所以即故等比数列的公比为，

故，故，故.

2．（2024·全国甲卷·高考真题）记为数列的前项和，已知．

(1)求的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）当时，，解得．

当时，，所以即，

而，故，故，

∴数列是以4为首项，为公比的等比数列，

所以.

3．（2023·全国甲卷·高考真题）设为数列的前*n*项和，已知．

(1)求的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）因为，

当时，，即；

当时，，即，

当时，，所以，

化简得：，当时，，即，

当时都满足上式，所以．

4．（2022·全国甲卷·高考真题）记为数列的前*n*项和．已知．

(1)证明：是等差数列；

【答案】(1)证明见解析；

【详解】（1）因为，即①，

当时，②，

①②得，，

即，

即，所以，且，

所以是以为公差的等差数列．

5．（2022·新高考全国Ⅰ卷·高考真题）记为数列的前*n*项和，已知是公差为的等差数列．

(1)求的通项公式；

【答案】(1)

【详解】（1）∵，∴,∴,

又∵是公差为的等差数列，

∴,∴,

∴当时，，

∴,

整理得：,

即,

∴

，

显然对于也成立，

∴的通项公式；

# 

1．（人教A版选择性必修第二册习题4.3第7题）人教A版选择性必修第二册习题4.3第7题）已知数列的首项为，且满足；

(1)求证是等比数列，并求数列的通项；

(2)记数列的前项和为，求.

【答案】(1)证明见解析，

(2)

（2）利用错位相减法和分组求和，求出答案.

【详解】（1）由题意，数列满足，即，

则，

又由，可得，

所以数列表示首项为，公比为-的等比数列.

所以，所以，

（2）由（1）知：，

设，记数列的前项和为；

设，记数列的前项和为；

则，

，

①，

②，

①②得：

，

，

，

所以.

2．（人教A版选择性必修第二册习题4.3第8题）若数列的首项，且满足，求数列的通项公式及前10项的和．

【答案】，2036

【详解】 ，，

是首项为，公比为2的等比数列，

，即，

.

3（人教A版选择性必修第二册习题4.3第11题）已知数列的首项，且满足．

(1)已知数列是等比数列，求公比；

(2)若，求满足条件的最大整数．

【答案】(1)

(2)

【详解】（1）解：由已知，，，

又因为，所以，，公比．

（2）解：由（1）可得数列是首项为，公比为的等比数列，

所以，，则，

所以，，

又因为，故数列为单调递增数列，

因为，

所以，满足不等式的最大整数的值为.

4．（人教A版选择性必修第二册习题4.3第11题改编）已知数列的首项，且满足.

(1)设，求证：数列为等比数列；

(2)设数列前*n*项和为，求；

(3)若，求满足条件的最大整数.

【答案】(1)证明见解析

(2)

(3)

【详解】（1）由题意，数列满足，可得，

所以，又，所以，

则为常数，所以数列是首项为，公比为的等比数列.

（2）由（1）知数列是首项为，公比为的等比数列，

所以.

（3）由（1）知，所以，

设数列的前项和为，

则

，

若，即，令，

则，

所以数列为递增数列，又，，

所以满足的最大整数的值为.

5．（人教A版选择性必修第二册习题4.3第12题）已知数列为等差数列，其中，，前*n*项和为，数列满足，

(1)求数列的通项公式；

(2)求证：数列中的任意三项均不能构成等比数列.

【答案】(1)

(2)证明见解析

【详解】（1）设等差数列的公差为，

因为，，所以，

所以，所以，所以

（2）设数列中任意三项，，

则，假设成等比数列，则

即

因为，所以，所以，即，与矛盾，

所以数列中的任意三项均不能构成等比数列．