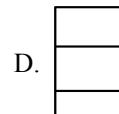
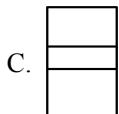
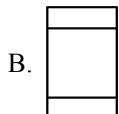
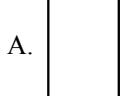
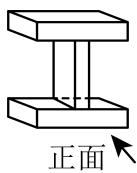


2024-2025 上九年级期中考试数学试卷

时间：120分钟 2024.11

一、选择题（本大题共6小题，每小题3分，共18分，每小题只有一个正确选项。）

1. 如图的几何体的左视图是选项图中的（ ）



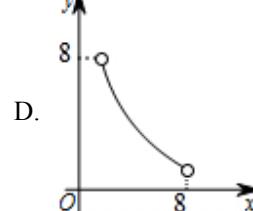
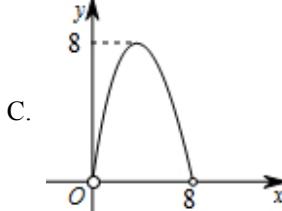
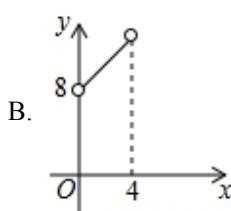
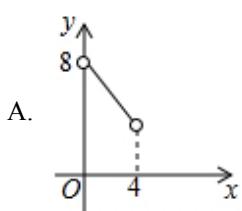
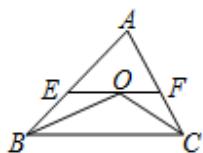
2. 点 $A(a, b)$ 、 $B(a-2, c)$ 两点均在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，则 b 与 c 的大小关系为（ ）

A. $b > c$ B. $b = c$ C. $b < c$ D. 不能确定

3. 已知点 $A(-2, m)$ 、 $B(2, m)$ 、 $C(4, m+12)$ 在同一个函数的图象上，这个函数可能是（ ）

A. $y=x$ B. $y=-\frac{2}{x}$ C. $y=x^2$ D. $y=-x^2$

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 两个内角平分线的交点，过点 O 作 $EF \parallel BC$ 分别交 AB ， AC 于点 E ， F ，已知 $\triangle ABC$ 的周长为 8， $BC=x$ ， $\triangle AEF$ 的周长为 y ，则表示 y 与 x 的函数图象大致是（ ）



5. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ ($b+d+f \neq 0$)，若 $a+c+e=6$ ，则 $b+d+f$ 等于（ ）

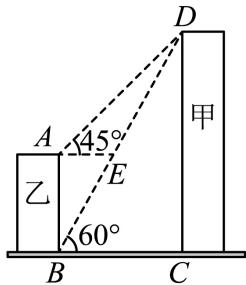
A. 12

B.

C. 6

D. 4

6. 如图，甲、乙为两座建筑物，它们之间的水平距离 BC 为 30m，在 A 点测得 D 点的仰角 $\angle EAD$ 为 45° ，在 B 点测得 D 点的仰角 $\angle CBD$ 为 60° ，则乙建筑物的高度为（ ）



A. $30\sqrt{3}$ m B. $(30\sqrt{3}-30)$ m C. 30m D. $30\sqrt{2}$ m

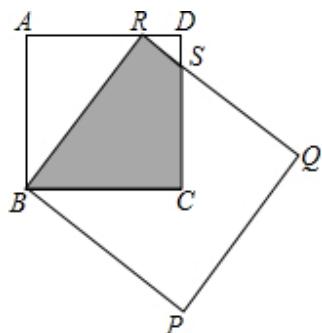
二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. 如果点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(2, y_3)$ 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图像上的三个点, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是 _____. (用“ $<$ ”连接)

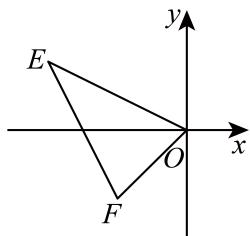
8. 两个相似三角形的面积比为 $4:9$, 其中一个三角形的周长为 12 cm, 则另一个三角形的周长是 _____. cm.

9. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过 A, B 两点, 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C , 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E , 连结 AD , 已知 $AC = 1, BE = 1, S_{\text{四边形 } BDOE} = 4$, 则 $S_{\triangle ACD} =$ _____.

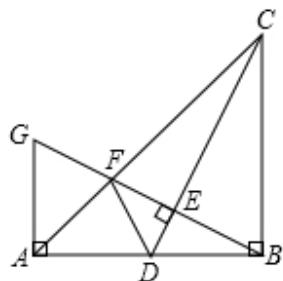
10. 如图为两正方形 $ABCD$ 、 $BPQR$ 重叠的情形, 其中 R 点在 AD 上, CD 与 QR 相交于 S 点. 若两正方形 $ABCD$ 、 $BPQR$ 的面积分别为 16、25, 则四边形 $RBCS$ 的面积为 _____.



11. 如图, 点 $E(-4, 2)$, $F(-2, -2)$, 以 O 为位似中心, 将 $\triangle EFO$ 放大 2 倍, 则点 E 对应点 F_1 (在第四象限) 的坐标是 _____.



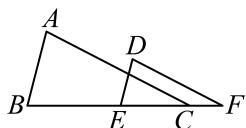
12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 是 AB 的中点, 连结 CD , 过点 B 作 $BG \perp CD$, 分别交 CD 、 CA 于点 E 、 F , 与过点 A 且垂直于 AB 的直线相交于点 G , 连结 DF . 给出以下五个结论: ① $\frac{AG}{AB} = \frac{FG}{FB}$; ② $\angle ADF = \angle CDB$; ③ 点 F 是 GE 的中点; ④ $AF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$; ⑤ $S_{\triangle ABC} = 5S_{\triangle ADF}$. 其中正确结论的序号是_____.



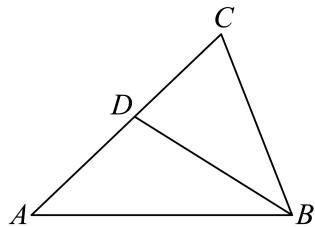
三. (本大题共 5 小题, 每小题 6 分共 30 分)

13. 计算: (1) $2\sin 30^\circ + 4\cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ - \cos^2 45^\circ$; (2) $\sqrt{2} \sin 45^\circ + 6\tan 30^\circ - 2\cos 30^\circ$.

14. 如图, $\angle A = \angle D$, $AC \parallel DF$, 求证: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 边上一点, $AD = 5$, $BC = 6$, $CD = 4$, 求证: $\triangle CDB \sim \triangle CBA$.



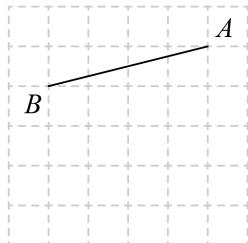
16. 已知 y 与 $x-1$ 成反比例, 且当 $x = -5$ 时, $y = 2$.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式;
(2) 当 $x = 5$ 时, 求 y 的值.

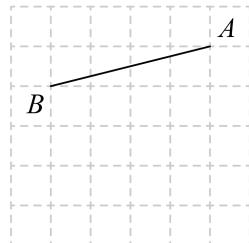
17. 图①、图②均是 6×6 的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点. 线段 AB 的端点均在格点上，按下列要求画出图形.

(1) 在图①中找到一个格点 C ，使 $\angle ABC$ 是锐角，且 $\tan \angle ABC = \frac{1}{4}$ ，并画出 $\triangle ABC$.

(2) 在图②中找到一个格点 D ，使 $\angle ADB$ 是锐角，且 $\tan \angle ADB = 1$ ，并画出 $\triangle ABD$.



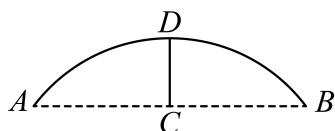
图①



图②

四、(本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分)

18. 如图，某地欲搭建一座圆弧型拱桥，跨度 $AB = 32$ 米，拱高 $CD = 8$ 米，其中 C 为 AB 的中点， D 为弧 AB 的中点. (参考数据: $\cos 37^\circ = 0.8, \sin 37^\circ = 0.6, \tan 37^\circ = 0.75$ ，结果保留 π)



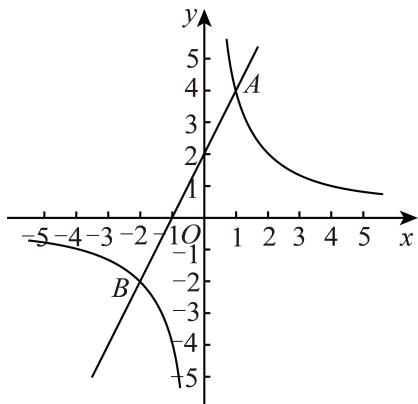
(1) 求该圆弧所在圆的半径；

(2) 求弧 AB 长.

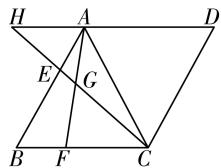
19. 如图直线 $y = 2x + m$ 与 $y = \frac{n}{x}$ ($n \neq 0$) 交于 A, B 两点，且点 A 的坐标为 $(1, 4)$.

(1) 求此直线和双曲线的表达式；

(2) 过 x 轴上一点 M 作平行于 y 轴 直线 l ，分别与直线 $y = 2x + m$ 和双曲线 $y = \frac{n}{x}$ ($n \neq 0$) 交于点 P, Q ，如果 $PQ = 2QM$ ，求点 M 的坐标.



20. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = AC$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, 且 $AE = BF$, CE 与 AF 相交于点 G .

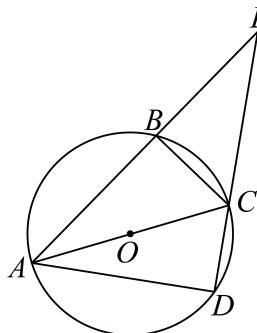


(1) 求证: $\angle FGC = \angle B$;
 (2) 延长 CE 与 DA 的延长线交于点 H , 求证: $BE \cdot CH = AF \cdot AC$.

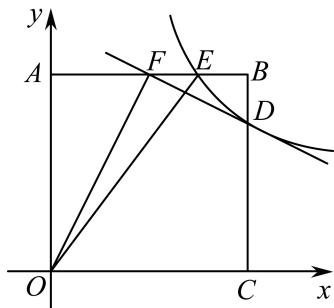
五. 解答题 (本大题共有 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21. 如图, AC 是圆 O 的直径, AB, AD 是圆 O 的弦, 且 $AB = AD$, 连接 BC, DC .

(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$;
 (2) 延长 AB, DC 交于点 E , 若 $EC = 5 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



22. 如图, 正方形 $AOCB$ 的边长为 4, 反比例函数的图象过点 $E(3, 4)$.

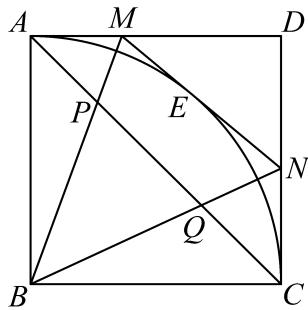


(1) 求反比例函数的解析式;
 (2) 反比例函数 图象与线段 BC 交于点 D , 直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 过点 D , 与线段 AB 相交于点 F , 求点 F 的坐标;
 (3) 连 OF, OE , 探究 $\angle AOF$ 与 $\angle EOC$ 的数量关系并证明 (提示: $OE = \sqrt{OA^2 + AE^2}$).

六. (本大题 12 分)

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是弧 AC 上的一个动点, 过点 E 的切线与 AD 交于点 M . 与 CD 交于点 N .

- (1) 求证: $\angle MBN=45^\circ$;
- (2) 设 $AM=x$, $CN=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;
- (3) 设正方形的对角线 AC 交 BM 于 P , BN 于 Q , 如果 $AP=m$, $CQ=n$, 求 m 与 n 之间满足的关系式.

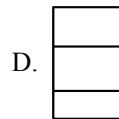
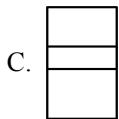
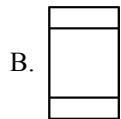
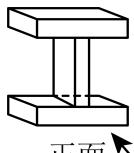


2024-2025 上九年级期中考试数学试卷

时间: 120 分钟 2024.11

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 每小题只有一个正确选项.)

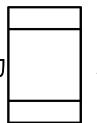
1. 如图的几何体的左视图是选项图中的()



【答案】B

【解析】

【分析】根据几何体的三视图分析即可



【详解】从左边看, 看到的图形为

故选 B.

【点睛】几何体的三视图是本题的考点, 本题考查了空间想象力, 是中考的易考点.

2. 点 $A(a, b)$ 、 $B(a - 2, c)$ 两点均在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 则 b 与 c 的大小关系为 ()

A. $b > c$ B. $b = c$ C. $b < c$ D. 不能确定

【答案】D

【解析】

【分析】先根据反比例函数的解析式判断出函数图象所在的象限及增减性, 再由 a 的范围不确定进行判断即可.【详解】解: \because 函数 $y = \frac{1}{x}$ 中 $k=1 > 0$, \therefore 此函数图象的两个分支分别位于一三象限, 且在每一象限内, y 随 x 的增大而减小. \because 无法确定 a 和 $a-2$ 的范围. $\therefore b$ 与 c 的大小关系不能确定.

故选: D.

【点睛】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数的增减性是解答此题的关键.

3. 已知点 $A(-2, m)$, $B(2, m)$, $C(4, m+12)$ 在同一个函数的图象上, 这个函数可能是 ()

A. $y=x$ B. $y=-\frac{2}{x}$ C. $y=x^2$ D. $y=-x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据正比例函数和反比例函数还有二次函数的图象的对称性进行分析即可.

【详解】 $\because A(-2, m), B(2, m)$,

\therefore 点A与点B关于y轴对称;

由于 $y=x$, $y=\frac{2}{x}$ 的图象关于原点对称, 因此选项A、B错误;

$\because m+12>m$, $y=ax^2$ 的图象关于y轴对称

由 $B(2, m)$, $C(4, m+12)$ 可知, 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而增大,

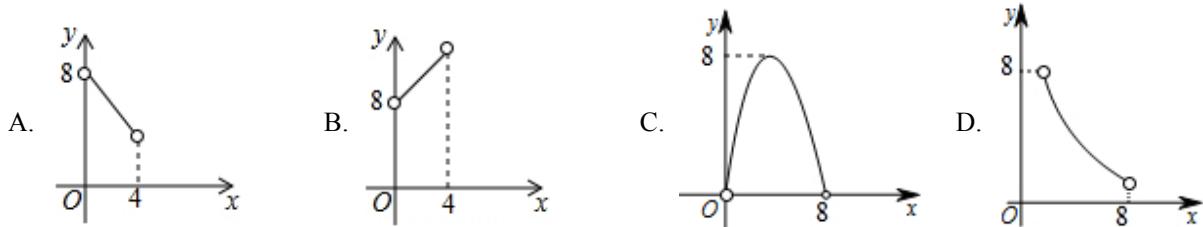
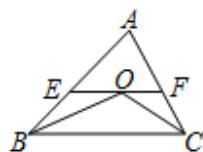
对于二次函数只有 $a>0$ 时, 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而增大,

\therefore C选项正确,

故选: C.

【点睛】考核知识点: 正比例函数和反比例函数还有二次函数的图象.理解正比例函数和反比例函数还有二次函数的图象的对称性是关键.

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点O是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 两个内角平分线的交点, 过点O作 $EF \parallel BC$ 分别交 AB , AC 于点E, F, 已知 $BC=x$, $\triangle AEF$ 的周长为 y , 则表示 y 与 x 的函数图象大致是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】由三角形的角平分线的性质和平行线的性质证出 $BE=OE$, $CF=OF$, 得出 $\triangle AEF$ 的周长 y 与 x 的关系式为 $y=8-x$, 求出 $0 < x < 4$, 即可得出答案.

【详解】解： \because 点O是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 两个内角平分线的交点，

$$\therefore \angle ABO = \angle CBO, \angle ACO = \angle BCO,$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle CBO, \angle FOC = \angle BCO,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle EOB, \angle ACO = \angle FOC,$$

$$\therefore BE = OE, CF = OF,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长 } y = AE + EF + AF = AE + OE + OF + AF = AB + AC,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 周长为 } 8, BC = x,$$

$$\therefore AB + AC = 8 - x,$$

$$\therefore y = 8 - x,$$

$$\therefore AB + AC > BC,$$

$$\therefore y > x,$$

$$\therefore 8 - x > x,$$

$$\therefore 0 < x < 4,$$

即y与x的函数关系式为 $y = 8 - x$ ($x < 4$)，

故选：A.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象、角平分线的有关证明、平行线的性质、等腰三角形的判定、三角形的周长等知识，求出y与x的关系式是解决问题的关键.

5. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ ($b + d + f \neq 0$)，若 $a + c + e = 6$ ，则 $b + d + f$ 等于()

A. 12

B.

C. 6

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据比例的性质得出 $3(a + c + e) = 2(b + d + f)$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ ($b + d + f \neq 0$)

$$\therefore 3a = 2b, 3c = 2d, 3e = 2f$$

$$\therefore 3(a + c + e) = 2(b + d + f)$$

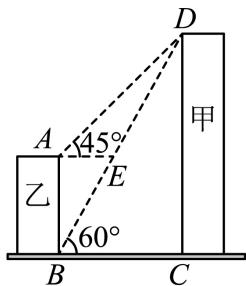
$$\therefore a + c + e = 6$$

$$\therefore b + d + f = 9,$$

故选: B.

【点睛】本题考查了比例的性质, 熟练掌握比例的性质是解题的关键.

6. 如图, 甲、乙为两座建筑物, 它们之间的水平距离 BC 为 30m , 在 A 点测得 D 点的仰角 $\angle EAD$ 为 45° , 在 B 点测得 D 点的仰角 $\angle CBD$ 为 60° , 则乙建筑物的高度为 ()



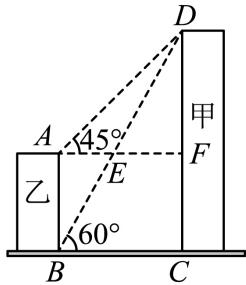
A. $30\sqrt{3}\text{m}$ B. $(30\sqrt{3}-30)\text{m}$ C. 30m D. $30\sqrt{2}\text{m}$

【答案】B

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 解直角三角形, 可求得 CD 的长, 即求得甲的高度, 过 A 作 $AF \perp CD$ 于点 F , 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中解直角三角形可求得 DF , 则可求得 CF 的长, 即可求得乙的高度.

【详解】如图, 过点 A 作 $AF \perp CD$ 于点 F , 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,



$$\angle DBC = 60^\circ, BC = 30\text{m}, \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC}$$

$$\therefore CD = BC \cdot \tan 60^\circ = 30\sqrt{3}\text{m},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\angle DAF = 45^\circ$,

$$\therefore DF = AF = BC = 30\text{m},$$

$$\therefore AB = CF = CD - DF = (30\sqrt{3} - 30)\text{m},$$

即乙建筑物的高度为 $(30\sqrt{3} - 30)\text{m}$.

故答案选: B.

【点睛】本题主要考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题，构造直角三角形，利用特殊角求得相应线段的长是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 如果点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(2, y_3)$ 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图像上的三个点，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是 _____. (用“ $<$ ”连接)

【答案】 $y_1 < y_3 < y_2$

【解析】

【分析】直接把三个点的坐标代入函数解析式，求得 y_1 、 y_2 、 y_3 的值，再比较大小即可.

【详解】解：把 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 、 $C(2, y_3)$ 代入是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 解析式得：

$$y_1 = -1; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2$$

故答案为： $y_1 < y_3 < y_2$

【点睛】本题还有多种方法，也可以结合函数图像确定 y_1 、 y_2 、 y_3 大小，还可以根据函数增减性确定 y_1 、 y_2 、 y_3 大小，要尽可能选择简单方法.

8. 两个相似三角形的面积比为 $4:9$ ，其中一个三角形的周长为 12 cm ，则另一个三角形的周长是 _____ cm .

【答案】 8 或 18

【解析】

【分析】根据相似三角形面积比等于相似比的平方，求出相似比即可.

【详解】解： \because 两个相似三角形的面积比为 $4:9$ ，

\therefore 两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，

\therefore 两个相似三角形的周长比为 $2:3$ ，设另一个三角形的周长为 $x\text{ cm}$ ，

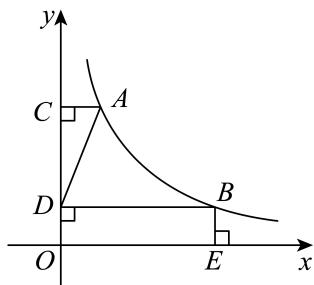
则 $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$ ，解得， $x = 8$ ；或 $\frac{12}{x} = \frac{2}{3}$ ，解得， $x = 18$ ；

故答案：8 或 18.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质，解题关键是根据面积比求出相似比，分类讨论，进行求解.

9. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过 A, B 两点，过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ，过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于点 D

，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ，连结 AD ，已知 $AC = 1, BE = 1, S_{\text{四边形 } BDOE} = 4$ ，则 $S_{\triangle ACD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查反比例函数 k 的几何意义，掌握相关的知识是解题的关键。先证明四边形 $OEBD$ 是矩形，利用 k 的几何意义求出反比例函数的解析式，即可求解。

【详解】解： $\because BE \perp x$ 轴， $BD \perp y$ 轴，

$$\therefore \angle BDO = \angle DOE = \angle BEO = 90^\circ$$

\therefore 四边形 $OEBD$ 是矩形，

$$\because BE = 1, S_{\text{矩形 } OEBD} = 4$$

$$\therefore OD = BE = 1, |k| = S_{\text{矩形 } OEBD} = 4,$$

$\therefore k = 4$ (负值舍去)，

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{4}{x},$$

$$\therefore AC = 1,$$

把 $x = 1$ 代入反比例函数解析式，得 $y = \frac{4}{1} = 4$ ，

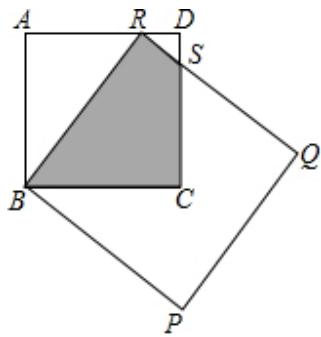
$$\therefore A(1, 4),$$

$$\therefore OC = 4, CD = OC - OD = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2},$$

故答案为: $\frac{3}{2}$ 。

10. 如图为两正方形 $ABCD$ ， $BPQR$ 重叠的情形，其中 R 点在 AD 上， CD 与 QR 相交于 S 点。若两正方形 $ABCD$ ， $BPQR$ 的面积分别为 16、25，则四边形 $RBCS$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{5}{8}$

【解析】

【分析】两正方形 $ABCD$ 、 $BPQR$ 的面积分别为 16、25，求出两个正方形的边长，根据勾股定理求出 AR ，然后证明 $\triangle ABR \sim \triangle DRS$ ，可得 $\frac{3}{DS} = \frac{4}{1}$ 求出 $DS = \frac{3}{4}$ ，用割补法求四边形面积 $S_{\text{四边形 } RBCS} = S_{\text{正方形 } ABCD} - S_{\triangle ABR} - S_{\triangle RDS}$ 计算即可。

【详解】解： \because 两正方形 $ABCD$ 、 $BPQR$ 的面积分别为 16、25，
 $\therefore AB^2 = 16, BR^2 = 25,$

$$\therefore AB = 4, BR = 5,$$

在 $\text{Rt} \triangle ABR$ 中， $AR = \sqrt{BR^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

$$\therefore RD = AD - AR = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ, \angle BRS = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ARB + \angle ABR = \angle ARB + \angle DRS = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABR = \angle DRS,$$

$\therefore \triangle ABR \sim \triangle DRS$ ，

$$\frac{AR}{DS} = \frac{AB}{DR} \text{ 即 } \frac{3}{DS} = \frac{4}{1},$$

$$\text{解得 } DS = \frac{3}{4},$$

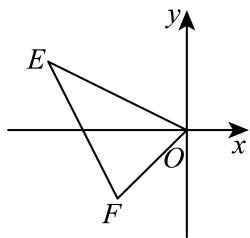
$$\therefore S_{\text{四边形 } RBCS} = S_{\text{正方形 } ABCD} - S_{\triangle ABR} - S_{\triangle RDS} = 16 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = 16 - 6 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

故答案为： $\frac{5}{8}$

【点睛】本题考查正方形的性质，勾股定理，三角形相似判定与性质，割补法求四边形面积，掌握正方形的性质，勾股定理，三角形相似判定与性质，割补法求四边形面积是解题关键。

11. 如图，点 $E(-4, 2)$, $F(-2, -2)$ ，以 O 为位似中心，将 $\triangle EFO$ 放大 2 倍，则点 E 的对应点 E_1 (在第四

象限) 的坐标是_____.



【答案】(8, -4)

【解析】

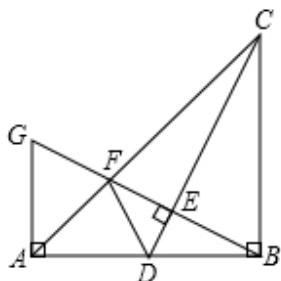
【分析】本题考查了位似变换及坐标与图形, 关于原点成位似的两个图形, 若位似比是 k , 则原图形上的点 (x, y) , 经过位似变化得到的对应点的坐标是 (kx, ky) 或 $(-kx, -ky)$. 以 O 为位似中心, 将 $\triangle EFO$ 放大 2 倍, 则点 E 的对应点 F_1 的坐标是 $E(-4, 2)$ 的坐标同时乘以 -2 计算即可得到结果.

【详解】解: \because 将 $\triangle EFO$ 放大 2 倍, 点 $E(-4, 2)$, 点 E 的对应点 F_1 在第四象限,

\therefore 点 F_1 的坐标是 $(-4 \times (-2), 2 \times (-2))$, 即 $(8, -4)$,

故答案为: $(8, -4)$.

12. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 是 AB 的中点, 连结 CD , 过点 B 作 $BG \perp CD$, 分别交 CD 、 CA 于点 E 、 F , 与过点 A 且垂直于 AB 的直线相交于点 G , 连结 DF . 给出以下五个结论: ① $\frac{AG}{AB} = \frac{FG}{FB}$; ② $\angle ADF = \angle CDB$; ③ 点 F 是 GE 的中点; ④ $AF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$; ⑤ $S_{\triangle ABC} = 5S_{\triangle ADF}$. 其中正确结论的序号是_____.



【答案】①②④

【解析】

【分析】根据题意证明 $\triangle AFG \sim \triangle CFB$, 进而可确定①; 由 $\triangle AFG \cong \triangle AFD$, 可得 $GF = FD$ 由

$FD > FE$ ，进而判断结论②， $\triangle AFG \cong \triangle AFD$ 可得 $AG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$ ，进而由 $\triangle AFG \sim \triangle CFB$ 可得

$\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$ ，即可判断③，根据 $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$ ，以及 D 是 AB 的中点即可判断⑤。

【详解】依题意得， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $GA \perp AB$ ，

$\therefore BC \parallel AG$ ，

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle CFB$ ，

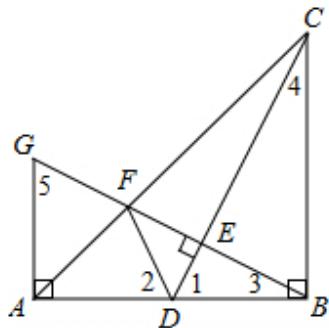
$\therefore \frac{AG}{BC} = \frac{FG}{FB}$ ，

又 $AB = BC$ ，

$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{FG}{FB}$ ，

故①正确；

如图，标记如下角，



$\because BG \perp CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ， $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle 3 = \angle 4 \\ AB = BC \\ \angle BAG = \angle CBD = 90^\circ \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BCD$ (ASA)，

$\therefore AG = BD$ ，

又 \because 点 D 是 AB 的中点，

$\therefore BD = AD$ ，

$\therefore AG = AD$ ，

$\because AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore \angle DAF = 45^\circ,$

$\because \angle GAB = 90^\circ,$

$\therefore \angle GAF = 45^\circ,$

$\therefore \angle GAF = \angle DAF,$

在 $\triangle AFG$ 与 $\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} AG = AD \\ \angle FAG = \angle FAD \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFD$ (SAS),

$\therefore \angle 5 = \angle 2,$

$\because \angle 5 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ,$

$\therefore \angle 5 = \angle 1,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2,$

即 $\angle ADF = \angle CDB,$

故②正确;

$\because \triangle AFG \cong \triangle AFD,$

$\therefore FG = FD,$

$\because \triangle FDE$ 是直角三角形,

$\therefore FD > FE,$

$\therefore FG > FE,$

即点 F 不是线段 EG 的中点,

故③不正确;

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}AB,$

$\because \triangle AFG \cong \triangle AFD,$

$\therefore AG = AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CB,$

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle CFB,$

$$\therefore \frac{AG}{BC} = \frac{AF}{FC},$$

$$\therefore FC = 2AF,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{2}}{3}AB,$$

故④正确；

$$\therefore AF = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

∴点D是AB的中点，

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABF},$$

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} = 6S_{\triangle BDF},$$

故⑤错误.

综上所述，①②④正确.

故答案为：①②④.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，勾股定理，三角形中线的性质，证明 $\triangle AFG \cong \triangle AFD$ 和 $\triangle AFG \sim \triangle CFB$ 是解题的关键.

三. (本大题共5小题，每小题6分共30分)

13. 计算：(1) $2\sin 30^\circ + 4\cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ - \cos^2 45^\circ$ ；(2) $\sqrt{2} \sin 45^\circ + 6\tan 30^\circ - 2\cos 30^\circ$.

【答案】(1) $\frac{13}{2}$. (2) $\sqrt{3} + 1$.

【解析】

【分析】(1) 把特殊锐角三角函数值分别代入求值；(2) 把特殊锐角三角函数值分别代入求值；

【详解】解：(1) 原式 $= 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

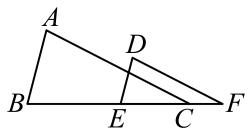
$$= 1 + 6 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \sqrt{3} + 1.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查特殊锐角三角函数值的混合运算，熟记函数值是关键.

14. 如图， $\angle A = \angle D$ ， $AC \parallel DF$ ，求证： $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



【答案】 见详解

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定，根据两个角分别相等的三角形为相似三角形，据此即可作答.

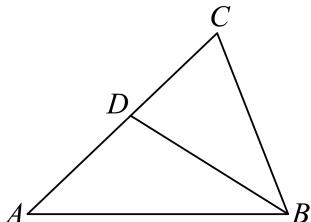
【详解】 解： $\because AC \parallel DF$

$$\therefore \angle DFB = \angle ACB$$

$$\because \angle A = \angle D$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

15. 如图，在 ABC 中， D 为 AC 边上一点， $AD = 5$ ， $BC = 6$ ， $CD = 4$ ，求证： $\triangle CDB \sim \triangle CBA$.



【答案】 答案见解析

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定，熟练掌握相似三角形的判定方法是解题关键. 求出两组对应边的比例，利用两边对应成比例且其夹角相等的判定方法证明相似.

【详解】 证明： $\because AD = 5$ ， $BC = 6$ ， $CD = 4$ ，

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{AC}{BC} &= \frac{AD+CD}{BC} = \frac{5+4}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{BC}{CD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \\
 \therefore \frac{BC}{CD} &= \frac{AC}{BC}.
 \end{aligned}$$

$\because \angle BCD = \angle ACB$,

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle CBA$.

16. 已知 y 与 $x-1$ 成反比例, 且当 $x=-5$ 时, $y=2$.

(1)求 y 与 x 的函数关系式;

(2)当 $x=5$ 时, 求 y 的值.

【答案】 (1) $y=-\frac{12}{x-1}$; (2)-3

【解析】

【分析】 (1) 设函数关系式为 $y=\frac{k}{x-1}$, 把 $x=-5$, $y=2$ 代入函数关系式中便可求出 k 的值, 进而得到函数

关系式;

(2) 将 $x=5$ 代入得到的函数关系式中即可得出 y 的值.

【详解】 解: (1)设 y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{k}{x-1}$,

由题意得 $2=\frac{k}{-5-1}$, 解得 $k=-12$

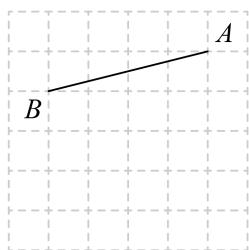
$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y=-\frac{12}{x-1}$

(2)当 $x=5$ 时, $y=-\frac{12}{x-1}=-\frac{12}{5-1}=-3$

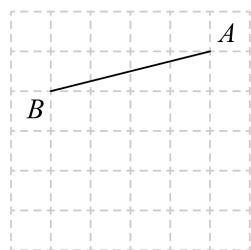
17. 图①、图②均是 6×6 的正方形网格, 每个小正方形的顶点称为格点. 线段 AB 的端点均在格点上, 按下列要求画出图形.

(1) 在图①中找到一个格点 C , 使 $\angle ABC$ 是锐角, 且 $\tan \angle ABC=\frac{1}{4}$, 并画出 $\triangle ABC$.

(2) 在图②中找到一个格点 D , 使 $\angle ADB$ 是锐角, 且 $\tan \angle ADB=1$, 并画出 $\triangle ABD$.



图①



图②

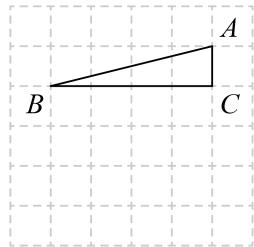
【答案】 (1)见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 直接利用网格结合锐角三角函数关系即可画出图形;

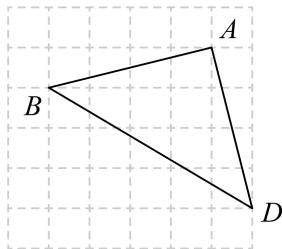
(2) 直接利用网格结合锐角三角函数关系即可画出图形.

【详解】(1) 如图①所示 (答案不唯一)；



图①

(2) 如图②所示 (答案不唯一)：

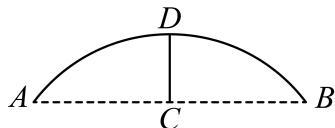


图②

【点睛】本题主要考查了锐角三角函数相关知识及利用网格作图的能力.结合条件并正确借助网格作图是解题关键.

四、(本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

18. 如图, 某地欲搭建一座圆弧型拱桥, 跨度 $AB = 32$ 米, 拱高 $CD = 8$ 米, 其中 C 为 AB 的中点, D 为弧 AB 的中点. (参考数据: $\cos 37^\circ = 0.8, \sin 37^\circ = 0.6, \tan 37^\circ = 0.75$, 结果保留 π)



(1) 求该圆弧所在圆的半径;

(2) 求弧 AB 长.

【答案】(1) 20 米 (2) $\frac{106\pi}{9}$ 米

【解析】

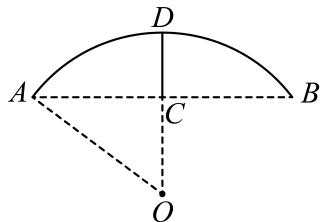
【分析】(1) 设该圆弧的圆心为 O , 连接 OA, OC, OD , 根据垂径定理得到 $OD \perp AB, OC \perp AB$, 则 O, C, D 三点共线, 设该圆弧所在圆的半径为 r 米, 则 $OD = OA = r$ 米, $AC = \frac{1}{2}AB = 16$ 米, $OC = OD - CD = (r - 8)$ 米, 据此在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中利用勾股定理求解即可;

(2) 解 $\text{Rt}\triangle AOC$ 得到 $\cos \angle OAC = \frac{4}{5}$, 则 $\angle OAC = 37^\circ$, 进而得到 $\angle AOC = 53^\circ$, 则

$\angle AOB = 2\angle AOC = 106^\circ$ ，据此利用弧长公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设该圆弧的圆心为 O ，连接 OA ， OC ， OD ，



$\because C$ 为 AB 的中点， D 为弧 AB 的中点，

$\therefore OD \perp AB$ ， $OC \perp AB$ ，

$\therefore O$ 、 C 、 D 三点共线，

设该圆弧所在圆的半径为 r 米，则 $OD = OA = r$ 米，

\because 跨度 $AB = 32$ 米，拱高 $CD = 8$ 米，

$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = 16$ 米， $OC = OD - CD = (r - 8)$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，由勾股定理得 $AC^2 + OC^2 = OA^2$ ，

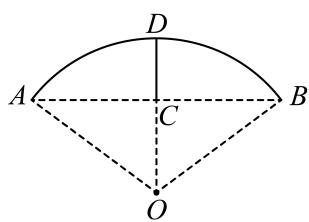
$\therefore 16^2 + (r - 8)^2 = r^2$ ，

解得 $r = 20$ ，

\therefore 该圆弧所在圆的半径为 20 米；

【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 OB ，



在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\cos \angle OAC = \frac{AC}{OA} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ ，

$\therefore \angle OAC = 37^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 53^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 2\angle AOC = 106^\circ$ ，

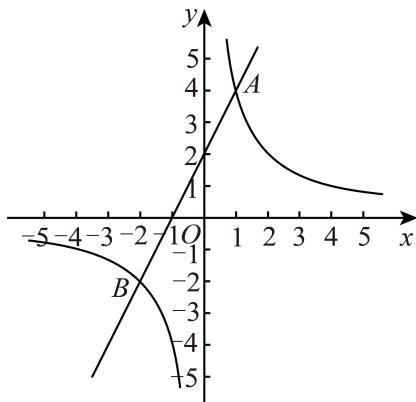
$\therefore \hat{AB}$ 的长为 $\frac{106 \times \pi \times 20}{180} = \frac{106\pi}{9}$ 米.

【点睛】本题主要考查了垂径定理, 勾股定理, 解直角三角形, 求弧长, 三角形内角和定理, 熟知垂径定理是解题的关键.

19. 如图直线 $y=2x+m$ 与 $y=\frac{n}{x}$ ($n \neq 0$) 交于 A, B 两点, 且点 A 的坐标为 $(1, 4)$.

(1)求此直线和双曲线的表达式;

(2)过 x 轴上一点 M 作平行于 y 轴的直线 l , 分别与直线 $y=2x+m$ 和双曲线 $y=\frac{n}{x}$ ($n \neq 0$) 交于点 P, Q , 如果 $PQ=2QM$, 求点 M 的坐标.



【答案】(1) 直线的解析式为 $y=2x+2$, 反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$; (2) $M(-3, 0)$ 或 $(2, 0)$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可解决问题;

(2) 设 $M(a, 0)$, 表示出 $P(a, 2a+2)$, $Q(a, \frac{4}{a})$, 根据 $PQ=2QM$, 列方程 $|2a+2-\frac{4}{a}|=2 \times \frac{4}{a}$, 解得 $a=2$, $a=-3$, 即可得到结果.

【详解】(1) $\because y=2x+m$ 与 $y=\frac{4}{x}$ ($n \neq 0$) 交于 $A(1, 4)$,

$$\begin{cases} 4=2+m \\ 4=n \end{cases},$$

$$\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases},$$

\therefore 直线的解析式为 $y=2x+2$, 反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2) 设 $M(a, 0)$,

$\because l \parallel y$ 轴,

$$\therefore P(a, 2a+2), Q(a, \frac{4}{a}),$$

$$\therefore PQ=2QM,$$

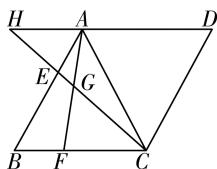
$$\therefore |2a+2 - \frac{4}{a}| = |2 \times \frac{4}{a}|,$$

解得: $a=2$ 或 $a=-3$,

$$\therefore M(-3, 0) \text{ 或 } (2, 0).$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点. 也考查了待定系数法求函数解析式.

20. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=AC$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, 且 $AE=BF$, CE 与 AF 相交于点 G .



(1) 求证: $\angle FGC = \angle B$;

(2) 延长 CE 与 DA 的延长线交于点 H , 求证: $BE \cdot CH = AF \cdot AC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 等边三角形的判定及性质, 全等三角形的判定及性质, 相似三角形的判定及性质等;

(1) 由菱形的性质得 $AB=BC$, 由等边三角形的判定得 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 由 SAS 可判定 $\triangle ABF \cong \triangle CAE$, 由全等三角形的性质得 $\angle BAF = \angle ACE$, 由三角形的外角性质得 $\angle FGC = \angle GAC + \angle ACE$, 即可得证;

(2) 由两角对应相等的三角形相似得 $\triangle BCE \sim \triangle DHC$, 由相似三角形的性质得 $\frac{BE}{DC} = \frac{CE}{HC}$, 由全等三角形的性质得 $CE = AF$, 即可得证;

掌握相关的判定方法及性质是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明: \because 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB = BC,$$

$\because AB = AC$,

$\therefore AB = BC = AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle B = \angle CAE = 60^\circ$,

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CA \\ \angle B = \angle CAE, \\ BF = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAE$ (SAS),

$\therefore \angle BAF = \angle ACE$,

$$\begin{aligned} \therefore \angle FGC &= \angle GAC + \angle ACE \\ &= \angle GAC + \angle BAF \end{aligned}$$

$$= \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \angle FGC = \angle B$;

【小问 2 详解】

证明: \because 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore \angle B = \angle D$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle BCE = \angle H$,

$\therefore \triangle BCE \sim \triangle DHC$,

$$\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{CE}{HC},$$

由 (1) 知 $\triangle ABF \cong \triangle CAE$,

$\therefore CE = AF$,

$\therefore CA = CB = CD$,

$$\therefore \frac{BE}{AC} = \frac{AF}{HC},$$

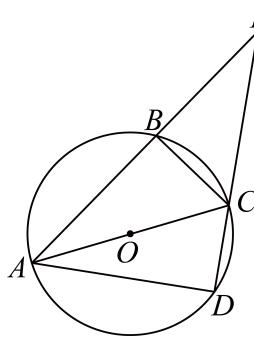
$$\therefore BE \cdot CH = AF \cdot AC.$$

五. 解答题 (本大题共有 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21. 如图, AC 是圆 O 的直径, AB 、 AD 是圆 O 的弦, 且 $AB = AD$, 连接 BC 、 DC .

(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$;

(2) 延长 AB 、 DC 交于点 E , 若 $EC = 5$ cm, $BC = 3$ cm, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



【答案】(1) 见解析; (2) 四边形 $ABCD$ 的面积为 18 cm^2

【解析】

【分析】(1) 根据直径所对 圆周角是直角进行证明.

(2) 由 (1) 的结论得到 DE 、 CD 长度, 再通过 $\angle EAD = \angle ECB$, $\angle D = \angle EBC = 90^\circ$, 得到 $\triangle EAD \sim \triangle ECB$, 再通过相似三角形形成比例以及勾股定理得到 BE 、 AD 的长再进行四边形面积的求解即可.

【详解】(1) 证明 $\because AC$ 是圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ABC = \angle D = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle ADC;$$

(2) 解 由(1)知 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle ADC$,

$$\therefore CD = BC = 3, AD = AB,$$

$$\therefore DE = 5 + 3 = 8,$$

$$\because \angle EAD = \angle ECB, \angle D = \angle EBC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle EAD \sim \triangle ECB$,

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore BE = \sqrt{CE^2 - BC^2} = 4,$$

$$\therefore \frac{AD}{3} = \frac{8}{4},$$

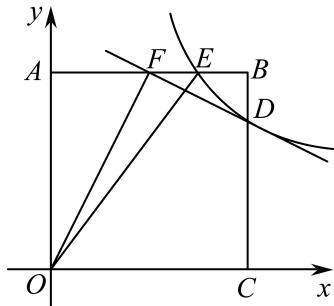
$$\therefore AD = 6,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 18 \text{ cm}^2.$$

【点睛】本题主要考查的是圆周角定理, 圆内接四边形的性质, 相似三角形的判定及性质、勾股定理、三

角形面积公式，熟练掌握定理是本题的解题关键.

22. 如图，正方形 $AOCB$ 的边长为 4，反比例函数的图象过点 $E(3, 4)$.



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 反比例函数的图象与线段 BC 交于点 D ，直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 过点 D ，与线段 AB 相交于点 F ，求点 F 的坐标；

(3) 连 OF, OE ，探究 $\angle AOF$ 与 $\angle EOC$ 的数量关系并证明（提示： $OE = \sqrt{OA^2 + AE^2}$ ）.

【答案】 (1) $y = \frac{12}{x}$ ；(2) $(2, 4)$ ；(3) $\angle AOF = \frac{1}{2}\angle EOC$ ，证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，把点 $E(3, 4)$ 代入即可求出 k 的值，进而得出结论；

(2) 由正方形 $AOCB$ 的边长为 4，故可知点 D 的横坐标为 4，点 F 的纵坐标为 4. 由于点 D 在反比例函数的图象上，所以点 D 的纵坐标为 3，即 $D(4, 3)$ ，由点 D 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 上可得出 b 的值，进而得出该直线的解析式，再把 $y=4$ 代入直线的解析式即可求出点 F 的坐标；

(3) 在 CD 上取 $CG=AF=2$ ，连接 OG ，连接 EG 并延长交 x 轴于点 H ，由全等三角形的判定定理可知 $\triangle OAF \cong \triangle OCG$ ， $\triangle EGB \cong \triangle HGC$ (ASA)，故可得出 $EG=HG$ ， $BE=CH=1$ ，故可得出 H 点的坐标，在 $Rt\triangle AOF$ 中， $AO=4$ ， $AE=3$ ，根据勾股定理得 $OE=5$ ，可知 $OH=OE$ ，即 OG 是等腰三角形底边 EF 上的中线. 所以 OG 是等腰三角形顶角的平分线，由此即可得出结论.

【详解】 (1) 设反比例函数的解析式 $y = \frac{k}{x}$ ，

\because 反比例函数的图象过点 $E(3, 4)$ ，

$$\therefore 4 = \frac{k}{3}， \text{ 即 } k=12.$$

\therefore 反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$ ；

(2) \because 正方形 $AOCB$ 边长为 4，

∴ 点 D 的横坐标为 4, 点 F 的纵坐标为 4.

∴ 点 D 在反比例函数的图象上,

∴ 点 D 的纵坐标为 3, 即 $D(4,3)$,

∴ 点 D 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 上,

∴ $3 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$, 解得 $b = 5$,

∴ 直线 DF 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 5$,

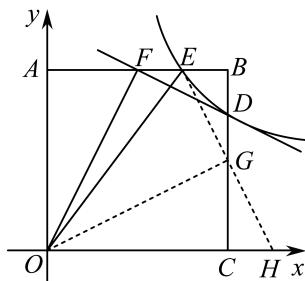
将 $y = 4$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 5$,

得 $4 = -\frac{1}{2}x + 5$, 解得 $x = 2$,

∴ 点 F 的坐标为 $(2,4)$;

$$(3) \angle AOF = \frac{1}{2} \angle EOC.$$

证明如下: 如图, 在 CD 上截取 $CG = AF = 2$, 连接 OG , 连接 EG 并延长交 x 轴于点 H .



∴ $AO = CO = 4$, $\angle OAF = \angle OCG = 90^\circ$, $AF = CG = 2$,

∴ $\triangle OAF \cong \triangle OCG$ (SAS).

∴ $\angle AOF = \angle COG$.

∴ $\angle EGB = \angle HGC$, $\angle B = \angle GCH = 90^\circ$, $BG = CG = 2$,

∴ $\triangle EGB \cong \triangle HGC$ (ASA).

∴ $EG = HG$.

设直线 EG 的解析式为 $y = mx + n (m \neq 0)$,

∴ $E(3,4), G(4,2)$,

$$\therefore \begin{cases} 4 = 3m + n \\ 2 = 4m + n \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = -2 \\ n = 10 \end{cases}$$

∴ 直线 EG 的解析式为 $y = -2x + 10$.

令 $y = -2x + 10 = 0$, 得 $x = 5$.

∴ $H(5, 0)$, $OH = 5$.

在 $Rt\triangle AOE$ 中, $AO = 4$, $AE = 3$, 根据勾股定理 $AE^2 + AO^2 = OE^2$ 得 $OE = 5$.

∴ $OH = OE$,

∴ OG 是等腰 $\triangle OEH$ 底边 EF 上的中线,

∴ OG 是等腰 $\triangle OEH$ 顶角的平分线,

∴ $\angle EOG = \angle GOH$.

∴ $\angle EOG = \angle GOH = \angle AOF$,

即 $\angle AOF = \frac{1}{2}\angle EOC$.

【点睛】 本题考查的是反比例函数综合题, 涉及到正方形的性质、用待定系数法求一次函数及反比例函数的解析式、等腰三角形三线合一的性质等相关知识. 解答关键是应用数形结合思想解答问题.

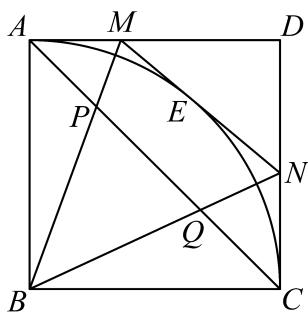
六、(本大题 12 分)

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是弧 AC 上的一个动点, 过点 E 的切线与 AD 交于点 M , 与 CD 交于点 N .

(1) 求证: $\angle MBN = 45^\circ$;

(2) 设 $AM = x$, $CN = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 设正方形的对角线 AC 交 BM 于 P , BN 于 Q , 如果 $AP = m$, $CQ = n$, 求 m 与 n 之间满足的关系式.



【答案】 (1) 详见解析; (2) $y = \frac{1-x}{x+1}$; (3) $m = \frac{1-\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-n}$.

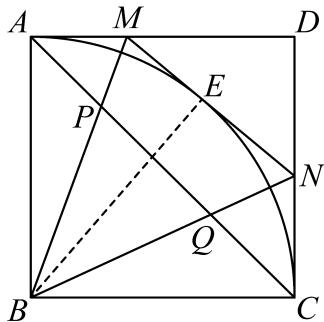
【解析】

【分析】 (1) 连接 BE , 证明 $Rt\triangle ABM \cong Rt\triangle EBM$ (HL), 即可得 $\angle ABM = \angle EBM$, 再证明 $Rt\triangle CBN \cong Rt\triangle EBN$, 即可证明 $\angle CBN = \angle EBN$, 再根据 $\angle ABM + \angle EBM + \angle EBN + \angle CBN = 90^\circ$, 即可证明 $\angle MBN = 45^\circ$.

(2) 根据 (1) 得 $MN = x + y$, $MD = 1 - x$, $ND = 1 - y$. 再根据勾股定理列方程化简即可得到 y 关于 x 的函数关系式.

(3) 根据 $\triangle ABQ \sim \triangle BPQ$ 和 $\triangle CBP \sim \triangle BQP$ 列出相似比, 再根据相似比可得 $\frac{AQ}{AB} = \frac{BC}{CP}$, 代入计算即可.

【详解】证明：(1) 如图，连接 BE ，



∴ MN 是 $\odot B$ 的切线

$\therefore BE \perp MN$,

$$\therefore AB = BE, \quad BM = BM$$

$\therefore \text{Rt } \triangle ABM \cong \text{Rt } \triangle EBM \text{ (HL)}$

$$\therefore \angle ABM = \angle EBM,$$

同理可证: $\text{Rt}\triangle CBN \cong \text{Rt}\triangle EBN$

$$\therefore \angle CBN = \angle EBN$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABM + \angle EBM + \angle EBN + \angle CBN = 90^\circ$$

$$\therefore 2(\angle MBE + \angle NBE) = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MBN = 45^\circ$$

(2) $\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle EBM, \text{ Rt}\triangle CBN \cong \text{Rt}\triangle EBN$

$$\therefore AM = ME = x, \quad CN = NE = y$$

$$\therefore MN = x + y, \quad MD = 1 - x, \quad ND = 1 - y$$

$$\therefore MD^2 + ND^2 = MN^2,$$

$$\therefore (1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2,$$

$$\therefore 1 - 2x + 1 - 2y = 2xy$$

1=x

$$\therefore x+1$$

(3) ∵四边形ABCD是正方形

$$\therefore AB=BC=1, \angle BAC=\angle ACB=45^\circ$$

$$\therefore AC=\sqrt{2}$$

$$\therefore \angle MBN=\angle BAC=45^\circ, \angle AQB=\angle ACB$$

$$\therefore \triangle ABQ \sim \triangle BPQ$$

$$\therefore \frac{AQ}{BQ}=\frac{BQ}{PQ}=\frac{AB}{BP}$$

$$\therefore \frac{AQ}{AB}=\frac{BQ}{BP} \quad ①$$

$$\therefore \angle MBN=\angle ACB=45^\circ, \angle CPB=\angle BPQ$$

$$\therefore \triangle CBP \sim \triangle BQP$$

$$\therefore \frac{CP}{BP}=\frac{BP}{PQ}=\frac{BC}{BQ}$$

$$\therefore \frac{BQ}{BP}=\frac{BC}{CP} \quad ②$$

$$\text{由} ①② \text{得: } \frac{AQ}{AB}=\frac{BC}{CP}$$

$$\therefore \frac{AC-CQ}{AC-AP}=\frac{1}{\sqrt{2}-m}$$

$$\therefore \sqrt{2}-n=\frac{1}{\sqrt{2}-m}$$

$$\therefore m=\frac{1-\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-n}$$

【点睛】本题主要考查正方形和圆的结合题目，此题综合性较强，难度较大，但是考的知识点比较简单，关键在于利用三角形的全等和相似。