第一章 直线与直线的方程

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知直线 l 的一个方向向量为(2，－1)，且经过点 $A(1,0)$，则直线 l 的方程为(　　)

A．$y=x-1$　　　　B．$y=-x+1$

C．$y=2x-1$　　　　D．$y=-12(x-1)$

2．经过点(4,1)，斜率为 3 的直线的点斜式方程为(　　)

A．$y-1=3(x-4)$　　　　B．$y-1=3(x+4)$

C．$y+1=3(x+4)$　　　　D．$y-1=-3(x-4)$

3.(2024·郑州一中高二期中)已知直线 l：$ax+by+1=0$ 过点(2,3)，则(　　)

A．点(a，b)一定在直线 $x+y+1=0$ 上

B．点(a，b)一定在直线 x2＋y3＝1 上

C．点(a，b)一定在直线 $2x+3y+1=0$ 上

D．点(a，b)一定在直线 $2x+3y+6=0$ 上

4．若方程$(m^2-1)x+(m^2-m)y+1=0$ 表示一条直线，则实数 m 满足(　　)

A．$m\neq 0$

B．$m\neq 1$

C．$m\neq -1$

D．$m\neq 1$ 且 $m\neq -1$ 且 $m\neq 0$

5．过点 $A(1,2)$的直线在两坐标轴上的截距之和为零，则该直线方程为(　　)

A．$y-x=1$　　　　B．$y+x=3$

C．$y=2x$ 或 $y+x=3$　　　　D．$y=2x$ 或 $y-x=1$

6．过点 $P(1,3)$作直线 l，若 l 经过点 $A(a,0)$和 $B(0，b)$，且 a，b 均为正整数，则这样的直线 l 可以作出(　　)

A．1 条　　　　B．2 条

C．3 条　　　　D．无数条

7. 斜拉桥是暨梁用若干根斜拉索拉在塔柱上的桥，它由梁、斜拉索和塔柱三部分组成. 如图 1，这是一座斜拉索大桥，共有 10 对永久拉索，在索塔两侧对称排列．如图 2，已知拉索上端相邻两个锚的间距$|P_iP_{i+1}|(i=1,2,3,\ldots,9)$均为 $4m$，拉索下端相邻两个锚的间距$|A_iA_{i+1}|(i=1,2,3,\ldots,9)$均为 18 m．最短拉索的锚 P_1，A_1 满足$|OP_1|=84$ m，$|OA_1|=78$ m，以 $B_{10}A_{10}$ 所在直线为 x 轴，OP_{10} 所在直线为 y 轴，则最长拉索 $B_{10}P_{10}$ 所在直线的斜率为(　　)

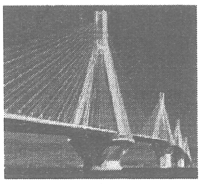


图1

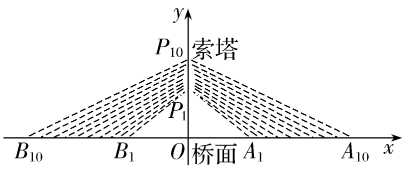


图2

A.13　　　　　　　B.12

C.4239　　　　　　D.62129

8．已知 $A(0，-1)$，$B(0,23-1)$，过点 $P(-2，-1)$的直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的倾斜角的取值范围是(　　)

A.\a\vs4\al\co1(0，\f(π6))　　　　B.\a\vs4\al\co1(0，\f(π3))

C.0，\f(π6))　　　　D.0，\f(π3))

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知 $A(3,2)$，$B(-4,1)$，$C(0，-1)$，则下列说法正确的是(　　)

A．直线 AB 的斜率为 7

B．直线 BC 的倾斜角为钝角

C．若 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 是直线 CA 的一个方向向量

D．$\triangle ABC$ 中，边 AB 上中线的斜率为-5

10．在平面直角坐标系中，下列四个结论中正确的是(　　)

A．每一条直线都有点斜式方程

B．方程 $k=$y＋1x－2 与方程 $y+1=k(x-2)$可表示同一条直线

C．直线 l 过点 $P_0(x_0，y_0)$，倾斜角为 90°，则其方程为 $x=x_0$

D．直线 $y-3=k(x+1)$恒过点$(-1,3)$

11．已知直线 l：$x-my+m-1=0$，则下列说法正确的是(　　)

A．直线 l 的斜率可以等于 0

B．若直线 l 与 y 轴的夹角为 30°，则 $m=$3)3 或－3)3

C．若直线的斜率为 12，则直线 l 的方程为 $x-2y+1=0$

D．若直线 l 在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的 2 倍，则 $m=1$ 或-2

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{n}=(2，-23)$，则直线 l 的倾斜角为________．

13．已知某直线满足以下两个条件，写出该直线的一个方程：________________.(用一般式方程表示)

①倾斜角为 30°；②不经过坐标原点．

14．直线 l 过点$(1,2)$且与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则$\triangle AOB$ 面积的最小值为________；当$\triangle AOB$ 面积取最小值时，直线 l 的一般式方程是________．

(本题第一空 2 分，第二空 3 分)

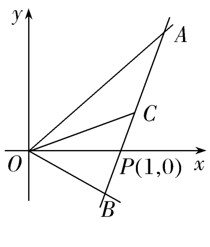
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．(13 分)已知坐标平面内两点 $M(m+3，3m+5)$，$N(2m-1,1)$.

(1)当直线 MN 的倾斜角为锐角时，求 m 的取值范围；

(2)若直线 MN 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1，-2\ 023)$，求 m 的值.

16. (15 分)如图，射线 OA，OB 分别与 x 轴正半轴成 45°和 30°角，过点 $P(1,0)$作直线 AB 分别交 OA，OB 于 A，B 两点，当 AB 的中点 C 恰好落在直线 $y=12x$ 上时，求直线 AB 的方程.



17．(15 分)已知两点 $A(-1，2)$，$B(m,3)$．

(1)求直线 AB 的方程；

(2)已知实数 m∈ ，求直线 AB 的倾斜角α的取值范围．

18．(17 分)宜昌大剧院和宜昌奥体中心是当地居民健康生活的场所，若两处在同一平面直角坐标系中对应的点分别为 $A(1,2)$，$B(0，b)(b>0)$．假设至喜长江大桥所在的直线为 l：$y=0$.

(1)若 $b=4$，现为方便大家出行，计划在至喜长江大桥上的点 P 处新增一出口通往两地，要使从 P 处到两地的总路程最短，求点 P 的坐标；

(2)若 BA 的延长线交直线 l 于点 $E(a,0)(a>0)$，求直线 BE 与两坐标轴围成的面积的最小值．

19．(17 分)在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P，B，C 的坐标分别为(0,1)，(2,0)，(0,2)，E 为线段 BC 上一点，直线 EP 与 x 轴的负半轴交于点 A.

(1)当点 E 坐标为\a\vs4\al\co1(\f(132)时，求过点 E 且在两坐标轴上截距绝对值相等的直线方程；

(2)求△BOE 与△ABE 面积之和 S 的最小值．

1．D [直线 l 的一个方向向量为(2，－1)，则直线 l 的斜率为$-12=-12$，直线 l 过点 $A(1,0)$，则 $y-0=-12(x-1)$，即 $x+2y-1=0$.故选 D.]

2．A [因为过点$(x_1，y_1)$且斜率为 k 的直线的点斜式方程是 $y-y_1=k(x-x_1)$，所以经过点(4,1)，斜率为 3 的直线的点斜式方程为 $y-1=3(x-4)$．故选 A.]

3．C [由点(2,3)在直线 l：$ax+by+1=0$ 上，得 $2a+3b+1=0$，故点$(a，b)$一定在直线 $2x+3y+1=0$ 上．故选 C.]

4. B [当 $m^2-1=0$ 时, $m=1$ 或 $m=-1$; 当 $m^2-m=0$ 时, $m=0$ 或 $m=1$.要使方程(m^2-1)

$x+(m^2-m)y+1=0$ 表示一条直线，则 m^2-1，m^2-m 不能同时为 0，所以 $m\neq 1$.故选 B.]

5．D　[当直线过原点时，其斜率为 2－01－0＝2，故直线方程为 $y=2x$；当直线不过原点时，设直线方程为 xa＋y－a＝1，代入点(1,2)可得 1a＋2－a＝1，解得 $a=-1$，故直线方程为 $y-x=1$.综上，可知所求直线方程为 $y=2x$ 或 $y-x=1$.故选 D.]

6．B　[∵直线 l 过点$(a,0)$和$(0，b)$，则设直线 l 的方程为 xa＋yb＝1，

∵直线 l 过点(1,3)，∴1a＋3b＝1，即 $3a=(a-1)b$，又 $a\in \mathbf{N}^*$，$b\in \mathbf{N}^*$，

∴当 $a=1$ 时，b 无解，此时，直线和 x 轴垂直，和 y 轴无交点，直线不过$(0，b)$，故 $a=1$ 时不满足条件：当 $a\geqslant 2$ 时，b＝3aa－1＝3＋3a－1，　①

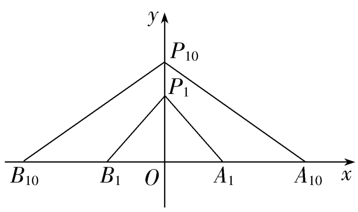
当 $a=2$ 时，$b=6$，当 $a=4$，时，$b=4$，

当 $a>4$ 时，由①知，满足条件的正整数 b 不存在，

综上所述，满足条件的直线有 2 条，故选 B.]

7. B　[如图，以 O 为原点建系，根据题意，最短拉索的锚 P_1，A_1 满足$|OP_1|=84$ m，$|OA_1|=78$ m，

且$|P_iP_{i+1}|(i=1,2,3，\ldots，9)$均为 4 m，拉索下端相邻两个锚的间距$|A_iA_{i+1}|(i=1,2,3，\ldots，9)$均为 18 m，则$|OA_{10}|=|OA_1|+|A_1A_{10}|=78+9\times 18=240$ m，即点 $A_{10}(240,0)$，同理 $B_{10}(-240,0)$，又$|OP_{10}|=|OP_1|+|P_1P_{10}|=84+9\times 4=120$，即点 $P_{10}(0,120)$，所以 $kB_{10}P_{10}$＝120－00＋240＝12，即最长拉索所在直线的斜率为 12.]



8．D　[因为 $A(0，-1)$，B(0,23－1)，$P(-2，-1)$，

所以 $k_{PA}=0$，即直线 PA 的倾斜角为 0，

k_{PB}＝3)－1＋10＋2＝3，即直线 PB 的倾斜角为π3，

若直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线斜率的范围为[0，3]，

所以直线 l 倾斜角的范围为 0，\f(π3)).故选 D.]

9．BCD　[因为 $A(3,2)$，(－4,1)，$C(0，-1)$，

对于 A，k_{AB}＝2－13＋4＝17，A 错误；

对于 B，k_{BC}＝1＋1－4－0＝－12<0，故直线 BC 的倾斜角为钝角，B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{\quad}$＝(3,3)＝3$\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}$ 是直线 CA 的一个方向向量，C 正确；

对于 D，因为 AB 的中点\a\vs4\al\co1(－\f(132)，则 AB 边上中线的斜率 k＝3212＝－5，D 正确．故选 BCD.]

10．CD　[直线的点斜式方程不能表示斜率不存在的直线，所以 A 错误；

点(2，－1)不在方程 k＝y＋1x－2 所表示的直线上，所以 B 错误；

倾斜角为 90°的直线，过 $P_0(x_0, y_0)$，直线方程为 $x=x_0$，C 正确；

由直线的点斜式方程知，不论 k 为何值，直线恒过点$(-1, 3)$，故 D 正确．故选 CD.]

11．BCD [当 $m=0$ 时，直线 l：$x=1$，斜率不存在，当 $m\neq 0$ 时，直线 l 的斜率为 1m，不可能等于 0，故 A 错误；若直线 l 与 y 轴的夹角为 30°，则直线 l 的倾斜角为 60°或 120°，而直线 l 的斜率为 1m，∴1m＝tan 60°＝3 或 1m＝tan 120°＝－3，∴m＝3)3 或 m＝－3)3，故 B 正确；由直线 l 的斜率 1m＝12，得 $m=2$，∴直线 l 的方程为 $x-2y+1=0$，故 C 正确；当 $m=0$ 时，直线 l：$x=1$，在 y 轴上的截距不存在；当 $m\neq 0$ 时，令 $x=0$，得 y＝m－1m，令 $y=0$，得 $x=1-m$，令 2 □ m－1 □ m＝1－m，得 $m=1$ 或－2，故 D 正确．故选 BCD.]

12．[解析] 由于直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{n}$＝(2，－23)，则直线 l 的斜率为 3)2＝－3，设直线的倾斜角为θ，则 tan θ＝－3，$\theta\in[0, \pi)$，∴θ＝2π3.

[答案] 2π3

13．[解析] 由题意得，所求直线的斜率 k＝tan 30°＝3)3，又直线不经过坐标原点，即一般式方程中的常数项非零，所以所求直线的一个一般式方程为 $x-3y+1=0$.

[答案] $x-3y+1=0$(答案不唯一)

14．[解析] 因为直线 l 与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A，B 两点，所以可设直线 l 的斜率为 k，且 $k<0$，则直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$，即 $y=kx+2-k$，令 $x=0$，得 $y=2-k$，所以 $B(0,2-k)$；令 $y=0$，得 x＝1－2k，所以 A\a\vs4\al\co1(1－\f(2k)，0).因为 $k<0$，所以△AOB 的面积为 S＝12(2－ k)\a\vs4\al\co1(1－ \f(2k))＝ 2＋ \a\vs4\al\co1(－ \f(2k))＋ \a\vs4\al\co1(－\f(k2))≥2＋2\rc\\rc\2))＝4，当且仅当－2k＝－k2，即 $k=-2$ 时等号成立，此时直线 l 的一般式方程为 $2x+y-4=0$.

[答案] 4 $2x+y-4=0$

15．[解] (1)因为倾斜角θ为锐角，则 k＝tan θ>0，而 k＝1－□ 3m＋5 □ 2m－1－□ m＋3 □＝－3m－4m－4>0，

即$(3m+4)(m-4)<0$，解得：－43<m<4，所以 m 的取值范围为\a\vs4\al\co1(－\f(43)，4).

(2)直线 MN 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$＝(1，－2 023)，可得 k＝－2 023＝－3m－4m－4，

解得：m＝2 024505.

16．[解] 由题意可得 k_{OA}＝tan 45°＝1，

k_{OB}＝tan (180°－30°)＝－3)3，所以直线 l_{OA}：$y=x$，l_{OB}：y＝－3)3x.

设 $A(m, m)$，$B(-3n, n)$，所以 AB 的中点 C\a\vs4\al\co1(\f(m－\r(3m＋n2).

由点 C 在直线 y＝12x 上，且 A，P，B 三点共线得\f(m＋n1m－\r(323)n－1 □＝□ n－0 □·□ m－1 □，

解得 $m=3$，所以 $A(3, 3)$.

又 $P(1,0)$，所以 $k_{AB}=k_{AP}$＝＝3)2，所以 l_{AB}：y＝3)2$(x-1)$，即直线 AB 的方程为(3＋3)$x-2y-3-3=0$.

17．[解]　(1)当 $m=-1$ 时，直线 AB 的方程为 $x=-1$；

当 $m\neq-1$ 时，直线 AB 的方程为 $y-2=$1m＋1·$(x+1)$.

(2)①当 $m=-1$ 时，$\alpha=$π2；

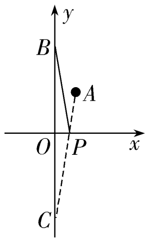
②当 $m\neq-1$ 时，$m+1\in-$\f(\r(3)3)，0)∪ \rc\](\a\vs4\al\co1(0，\r(3))，

∴直线 AB 的斜率 $k=$1m＋1∈(－∞，－3]∪ \f(\r(3)3)，＋∞)，

∴$\alpha\in$ \f(ππ2)∪ \a\vs4\al\co1(\f(π2π3).

综上所述，直线 AB 的倾斜角α的取值范围为\f(π2π3).

18．[解]



(1)如图，点 $B(0,4)$关于 x 轴的对称点为 $C(0，-4)$，连接 AC 交 x 轴于点 P，此时从点 P 处到两地的总路程最短，为$|PA|+|PB|=|PA|+|PC|=|AC|$，此时 AC 所在直线的方程为 y－2－4－2＝x－10－1，即 $6x-y-4=0$.令 $y=0$，得 $x=23$，所以点 P 的坐标为\a\vs4\al\co1(\f(23)，0).

(2)由题意知 BE 所在直线的方程为 xa＋yb＝1($a>0$，$b>0$)，

因为点 A 在 BE 上，所以 1a＋2b＝1.因为 $a>0$，$b>0$，所以 1＝1a＋2b≥ 22ab)，所以 $ab\geqslant8$，当且仅当 1a＝2b＝12，即 $a=2$，$b=4$ 时等号成立，

所以$(S_{\triangle EOB})_{\min}=12\times\ 8=4$.

19．[解]　(1)设过点 E\a\vs4\al\co1(\f(132)且在两坐标轴上截距绝对值相等的直线为 l，

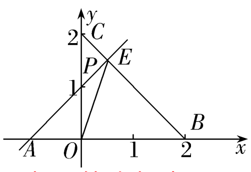
当直线 l 过原点时，直线 l 在 x，y 轴上的截距都为 0，满足题意，其方程为 $y=3x$；

当直线 l 不过原点时，设直线 l 的方程为 xa＋ya＝1 或 xa＋y－a＝1，于是得 $12a+32a=1$ 或 $12a+32-$a＝1，

解得 $a=2$ 或 $a=-1$，直线 l 的方程为 $x+y=2$ 或 $x-y=-1$.

综上，可知所求直线的方程为 $3x-y=0$ 或 $x+y-2=0$ 或 $x-y+1=0$.

(2)如图，根据题意可得，直线 BC：x2＋y2＝1，



因为点 E 在线段 BC 上，所以可设点 E 的坐标为$(t,2-t)$，$0\leqslant t\leqslant2$.

设 $A(x_0,0)$，$x_0<0$，由 A，P，E 三点共线，可得 $\overrightarrow{}$ ∥ $\overrightarrow{}$，

又$\overrightarrow{\quad}=(t,1-t)$，$\overrightarrow{\quad}=(x_0,\ -1)$，所以 $x_0(1-t)=-t$，显然 $t\neq 1$，则 $x_0=-$t1−t，由 $x_0<0$，可得 $0<t<1$，

$S_{\triangle BOE}=12|OB|\cdot(2-t)=2-t$，$S_{\triangle ABE}=12|AB|\cdot(2-t)=$12\a\vs4\al\co1(2+\f(t1−t))$(2-t)$.

$S=2-t+$12\a\vs4\al\co1(2+\f(t1−t))$(2-t)=$□2−t□□4−3t□2□1−t□=12× 3t2−10t+81−t=12× 3□1−t□2+4□1−t□+11−t=2+123□1−t□+\f(11−t))≥2+ 11−t)=2+3,

当且仅当 $3(1-t)=$11−t，即 $t=1-$3)3 时取等号，

所以$\triangle BOE$与$\triangle ABE$面积之和 S 的最小值为 $2+3$.