第 12 讲:函数的零点题型拓展与方法归纳

题型一:零点存在定理

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2$ 的零点所在的大致区间为（　　）

A. $(1, \mathrm{e})$　　B. $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^2)$　　C. $(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3)$　　D. $(\mathrm{e}^3, \mathrm{e}^4)$

2. 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,3)$　　B. $(1,2)$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,2)$

3. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $2<a<3<b<4$ 时，函数 $f(x)$ 的零点为 $x_0\in(n, n+1)\,(n\in N^*)$，则 $n=$ ______.

题型二:零点个数问题

4. 函数 $f(x)=|x-2|-\ln x$ 在定义域内零点的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x},x\geqslant 2,\\(x-1)^3,x<2,\end{cases}$ 若函数$g(x)=f(x)-k$有两个零点，则这两零点所在的区间为（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,+\infty)$

7. 函数$f(x)=x^3-2x^2-x+2$的零点是（　　）

A. 1，2，3　　B. -1，1，2　　C. 0，1，2　　D. -1，1，-2

8. 若定义在R上的偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x)$，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，则函数$y=f(x)-\log_3|x|$的零点个数是（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6

9. 已知$f(x)$是定义在R上的奇函数，满足$f(x+1)=-f(x)$，当$x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$f(x)=9^x-1$，则$h(x)=(x-1)f(x)-2$在区间$[-2021,2023]$上所有零点之和为______.

10. 已知函数$y=f(x)\,(x\in R)$满足$f(x+2)=2f(x)$，且$x\in[-1,1]$时，$f(x)=-|x|+1$，则当$x\in[-10,10]$时，$y=f(x)$与$g(x)=\log_4|x|$的图象的交点个数为（　　）

A. 13　　B. 12　　C. 11　　D. 10

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, & x<2\\ \dfrac{3}{x-1}, & x\geqslant 2\end{cases}$，若方程 $f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,3)$　　B. $(0,3)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,1)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x\geqslant 0\\ x^2+ax+a, & x<0\end{cases}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a<4$　　B. $a>4$　　C. $a>4$ 或 $a<0$　　D. $a\geqslant 4$

13. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}+2a$ 只有一个零点，则 $a=$ ______.

14. 若直角坐标平面内的两个不同点 P、Q 满足条件：

①P、Q 都在函数 $y=f(x)$ 的图象上；

②P、Q 关于原点对称，则称点对 $[P,Q]$ 是函数 $y=f(x)$ 的一对“友好点对”（注：点对 $[P,Q]$ 与 $[Q,P]$ 看作同一对“友好点对”）. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x>0\\ -x^2-4x, & x\leqslant 0\end{cases}$，则此函数的“友好点对”有（　　）对.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

15. 已知 $\lambda\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x-2, x\geqslant\lambda,\\ x^2+x-2, & x<\lambda,\end{cases}$ 若方程 $f(x)=0$ 恰有 2 个实数解，则 λ 的取值范围是（　　）

A. $(-2,1]$　　B. $(-2,1]\cup(2,+\infty)$

C. $(-2,1]\cup[2,+\infty)$　　D. $(-2,1)\cup[2,+\infty)$

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx+1, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，则下列关于函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数的判断正确的是（　　）

A. 当 $k>0$ 时，有 3 个零点；当 $k<0$ 时，有 2 个零点

B. 当 $k>0$ 时，有 4 个零点；当 $k<0$ 时，有 1 个零点

C. 无论 k 为何值，均有 2 个零点

D. 无论 k 为何值，均有 4 个零点

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg(-x)|, & x<0\\ x^2-6x+4, & x\geqslant 0\end{cases}$ 若关于 x 的函数 $y=f^2(x)-bf(x)+1$ 有 8 个不同的零点，则实数 b 的取值范围是______.

18. 已知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的偶函数，对于任意 $x\in R$，都有 $f(x+6)=f(x)+f(3)$ 成立，当 $x_1, x_2\in[0,3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$. 给出下列命题：

①$f(3)=0$；

②直线 $x=-6$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

③函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,-6]$ 上为增函数；

④函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,9]$ 上有四个零点.

其中所有正确命题的序号为______（把所有正确命题的序号都填上）

19. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意的 x 都有 $f(x+5)=f(1-x)+f(3)$，且 $f(5)=-2$. 当 $x_1, x_2\in[0,3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，则（　　）

A. $f(29)=-2$

B. 直线 $x=-9$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴

C. $f(x)$ 在 $[8,10]$ 上是减函数

D. 方程 $f(x)+2=0$ 在 $(-7,7)$ 上有 6 个实根

20. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若满足：① $f(x)$ 在 D 内是单调函数；②存在 $[a,b]\subseteq D(a<b)$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域也是 $[a,b]$，则称 $y=f(x)$ 为闭函数．若 $f(x)=k+\sqrt{x}$ 是闭函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{4},0\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

课堂总结

练 习

1. 设 $f(x)=-5x^3+2x+1$，则在下列区间中，使函数 $f(x)$ 有零点的区间是（　　）

A. $[0,1]$　　B. $[1,2]$　　C. $[-2,-1]$　　D. $[-1,0]$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, x>0,\\ x^2+x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则实数 m 的取值范围是______.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx+1, & x\leqslant 0\\ \log_2 x, & x>0\end{cases}$，下列是关于函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数的 4 个判断，其中正确的是（　　）

A. 当 $k>0$ 时，有 3 个零点　　B. 当 $k<0$ 时，有 2 个零点

C. 当 $k>0$ 时，有 4 个零点　　D. 当 $k<0$ 时，有 1 个零点