



第13讲:三角函数的概念及同角之间的关系

【要点梳理】

要点1 三角函数定义

设 α 是一个任意大小的角, α 的终边与单位圆的交点为 $P(x,y)$,则 $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$.

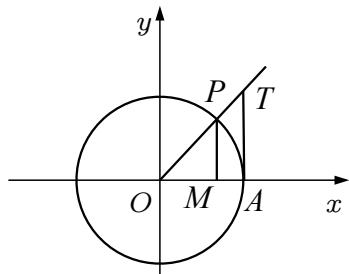
要点2 同角三角函数的基本关系

$$(1) \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, (\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha); (2) \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

要点3 诱导公式

口诀:奇变偶不变, 符号看象限(所谓奇偶指的是 $\frac{n\pi}{2}+\alpha$ 中整数n的奇偶性, 把 α 看作锐角)

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha, & n \text{为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha, & n \text{为奇数}, \end{cases}; \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha, & n \text{为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha, & n \text{为奇数}, \end{cases}$$





1. 终边落在直线 $y=x$ 上的角 α 的集合为 ()
- A. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$
2. 把 $\frac{5\pi}{4}$ 化成角度是 ()
- A. 45° B. 225° C. 300° D. 135°
3. 200° 的弧度数为 ()
- A. $\frac{7\pi}{10}$ B. $\frac{10\pi}{9}$ C. 9π D. 10π
4. 已知 α 是第三象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ()
- A. 第一或二象限的角 B. 第二或三象限的角
 C. 第一或三象限的角 D. 第二或四象限的角
5. 一个半径为 R 的扇形, 它的周长为 $4R$, 则这个扇形所含弓形的面积为 ()
- A. $\frac{1}{2}(2 - \sin 1 \cdot \cos 1)R^2$ B. $\frac{1}{2}R^2 \sin 1 \cdot \cos 1$
 C. $\frac{1}{2}R^2$ D. $R^2 - \sin 1 \cdot \cos 1 \cdot R^2$





6. (2022·甲卷) 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作,其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”. 如图, \widehat{AB} 是以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧, C 是 AB 的中点, D 在 \widehat{AB} 上, $CD \perp AB$.

“会圆术”给出 \widehat{AB} 的弧长的近似值 s 的计算公式: $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ 时,

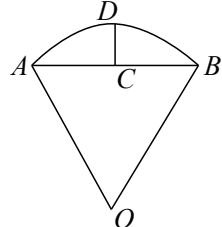
$$s = (\quad)$$

A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$



7. 设 $a < 0$, 角 α 的终边经过点 $P(-3a, 4a)$, 那么 $\sin\alpha + 2\cos\alpha$ 的值等于 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

8. 若 $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 _____.

9. (2013 安徽) 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = _____$.

10. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\sin\alpha - \cos\alpha$ 的值为 _____.





11. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$, 且 α 为第二象限角, 求下列各式的值

$$(1) \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$(2) \sin x - \cos x$$

$$(3) \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$(4) \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$(5) \sin^3 x + \cos^3 x$$

$$(6) \sin^6 x - \cos^6 x$$

$$(7) \sin^6 x + \cos^6 x$$

12. 已知 $\tan x = 2$, 则

$$(1) \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \text{_____}.$$

$$(2) \sin x \cos x = \text{_____}.$$

$$(3) \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = \text{_____}.$$





13. (2013浙江理改编) 已知 $\alpha \in R$, $\sin\alpha + 2\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

14. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{13}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\tan\alpha$ 的值为 ()

- A. $\pm \frac{12}{5}$ B. $\pm \frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{12}{5}$

15. (2012全国改编) 已知 α 为第二象限角, $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 若 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $(1 + \sin^2\alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$, 则 $\tan\beta$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 在 $[0, 2\pi]$ 上满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[0, \frac{\pi}{6}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ D. $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$

18. 在 $[0, 2\pi]$ 上, 使不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ 成立的 x 的集合为 ()

- A. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ B. $[0, \frac{5\pi}{3}]$
 C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ D. $[0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$





19. 已知 $\sin\alpha > \sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ()
- A. 若 α, β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$
 C. 若 α, β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$
- B. 若 α, β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$
 D. 若 α, β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$

20. 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的大小顺序是 ()
- A. $\cos\alpha < \tan\alpha < \sin\alpha$
 C. $\cos\alpha < \sin\alpha < \tan\alpha$
- B. $\tan\alpha < \cos\alpha < \sin\alpha$
 D. $\sin\alpha < \cos\alpha < \tan\alpha$

21. 设 $a = \sin 1$, $b = \cos 1$, $c = \tan 1$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a > b > c$
 B. $a > c > b$
 C. $c > a > b$
 D. $c > b > a$

22. 以下区间中, 使关于 x 的不等式 $\sin x > \cos x$ 成立的是 ()
- A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
 B. $(0, \frac{\pi}{4})$
 C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
 D. $(\pi, 2\pi)$

23. (2024 春·南阳期中) 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{6})$, $a = (\sin\alpha)^{\sin\alpha}$, $b = (\cos\alpha)^{\sin\alpha}$, $c = (\tan\alpha)^{\sin\alpha}$, 则 ()
- A. $a < b < c$
 B. $a < c < b$
 C. $b < a < c$
 D. $c < a < b$





课堂总结



（此部分为课堂总结区，提供20行手写练习空间）



练习

1. 已知 $\tan\theta = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ 的值为 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 7 D. -7
2. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x \geq |\cos x|$ 成立的 x 的取值范围为 ()
- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ C. $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
3. 已知 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ 的值为 ()
- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

