



第13讲：三角函数的概念及同角之间的关系

【要点梳理】

【要点1】三角函数定义

设 α 是一个任意大小的角， α 的终边与单位圆的交点为 $P(x, y)$ ，则 $\sin \alpha = y$ ， $\cos \alpha = x$ ， $\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$ 。

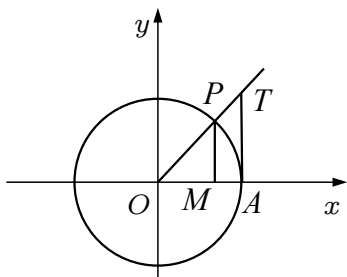
【要点2】同角三角函数的基本关系

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ， $(\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha)$ ；(2) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

【要点3】诱导公式

口诀：奇变偶不变，符号看象限（所谓奇偶指的是 $\frac{n\pi}{2} + \alpha$ 中整数 n 的奇偶性，把 α 看作锐角）

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \alpha, n \text{ 为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha, n \text{ 为奇数}, \end{cases} ; \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \alpha, n \text{ 为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \alpha, n \text{ 为奇数}, \end{cases}$$





1. 终边落在直线 $y=x$ 上的角 α 的集合为 ()

A. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{\alpha \mid \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

2. 把 $\frac{5\pi}{4}$ 化成角度是 ()

A. 45°

B. 225°

C. 300°

D. 135°

3. 200° 的弧度数为 ()

A. $\frac{7\pi}{10}$

B. $\frac{10\pi}{9}$

C. 9π

D. 10π

4. 已知 α 是第三象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ()

A. 第一或二象限的角

B. 第二或三象限的角

C. 第一或三象限的角

D. 第二或四象限的角

5. 一个半径为 R 的扇形, 它的周长为 $4R$, 则这个扇形所含弓形的面积为 ()

A. $\frac{1}{2}(2 - \sin 1 \cdot \cos 1)R^2$

B. $\frac{1}{2}R^2 \sin 1 \cdot \cos 1$

C. $\frac{1}{2}R^2$

D. $R^2 - \sin 1 \cdot \cos 1 \cdot R^2$





6. (2022·甲卷) 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作,其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”. 如图, \widehat{AB} 是以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧, C 是 AB 的中点, D 在 \widehat{AB} 上, $CD \perp AB$.

“会圆术”给出 \widehat{AB} 的弧长的近似值 s 的计算公式: $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ 时,

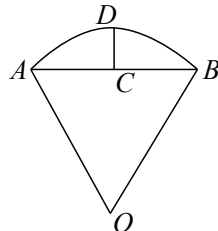
$s = (\quad)$

A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$



7. 设 $a < 0$, 角 α 的终边经过点 $P(-3a, 4a)$, 那么 $\sin\alpha + 2\cos\alpha$ 的值等于 ()

A. $\frac{2}{5}$

B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

8. 若 $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 _____.

9. (2013 安徽) 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, 则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) =$ _____.

10. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\sin\alpha - \cos\alpha$ 的值为 _____.





11. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$, 且 α 为第二象限角, 求下列各式的值

(1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

(2) $\sin x - \cos x$

(3) $\sin^2 x - \cos^2 x$

(4) $\sin^3 x - \cos^3 x$

(5) $\sin^3 x + \cos^3 x$

(6) $\sin^6 x - \cos^6 x$

(7) $\sin^6 x + \cos^6 x$

12. 已知 $\tan x = 2$, 则

(1) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\sin x \cos x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = \underline{\hspace{2cm}}$.





13. (2013 浙江理改编) 已知 $\alpha \in R$, $\sin \alpha + 2\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 求 $\tan \alpha$ 的值.

14. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{13}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\tan \alpha$ 的值为 ()

A. $\pm \frac{12}{5}$

B. $\pm \frac{5}{12}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $-\frac{12}{5}$

15. (2012 全国改编) 已知 α 为第二象限角, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 若 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $(1 + \sin^2 \alpha) \sin \beta = \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta$, 则 $\tan \beta$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

17. 在 $[0, 2\pi]$ 上满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $[0, \frac{\pi}{6}]$

B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$

D. $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$

18. 在 $[0, 2\pi]$ 上, 使不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ 成立的 x 的集合为 ()

A. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

B. $[0, \frac{5\pi}{3}]$

C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

D. $[0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$





19. 已知 $\sin\alpha > \sin\beta$, 那么下列命题成立的是 ()
- A. 若 α, β 是第一象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$ B. 若 α, β 是第二象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$
C. 若 α, β 是第三象限角, 则 $\cos\alpha > \cos\beta$ D. 若 α, β 是第四象限角, 则 $\tan\alpha > \tan\beta$
20. 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的大小顺序是 ()
- A. $\cos\alpha < \tan\alpha < \sin\alpha$ B. $\tan\alpha < \cos\alpha < \sin\alpha$
C. $\cos\alpha < \sin\alpha < \tan\alpha$ D. $\sin\alpha < \cos\alpha < \tan\alpha$
21. 设 $a = \sin 1, b = \cos 1, c = \tan 1$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
22. 以下区间中, 使关于 x 的不等式 $\sin x > \cos x$ 成立的是 ()
- A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ B. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ D. $(\pi, 2\pi)$
23. (2024 春·南阳期中) 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $a = (\sin\alpha)^{\sin\alpha}, b = (\cos\alpha)^{\sin\alpha}, c = (\tan\alpha)^{\sin\alpha}$, 则 ()
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$





课堂总结



练习

1. 已知 $\tan\theta = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ 的值为 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 7 D. -7
2. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x \geq |\cos x|$ 成立的 x 的取值范围为 ()
- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ C. $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
3. 已知 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ 的值为 ()
- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

