第18讲：三角函数综合应用

1.已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中 φ 为实数，若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in R$ 恒成立，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$　　B. $\left[k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in Z)$

C. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$　　D. $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi\right](k\in Z)$

2.函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in Z)$　　B. $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{11\pi}{12}\right](k\in Z)$

C. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in Z)$　　D. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$

3.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，且在区间 $[0,\pi]$ 上只取得一次最大值，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$　　C. $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right]$　　D. $\left[\frac{5}{6},\frac{8}{9}\right]$

4.(2014全国)若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是______.

5.(2022•乙卷)记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\,(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T．若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为______.

6. (2022• 新高考Ⅰ) 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$,且 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称,则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ______.

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

7. (2023• 乙卷) 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增,直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像的两条对称轴,则 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=$ (　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (2019• 新课标III) 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$,已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点. 下述四个结论:

①$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;

②$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点;

③$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ 单调递增;

④ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5},\ \frac{29}{10}\right)$.

其中所有正确结论的编号是 (　　)

A. ①④　　B. ②③　　C. ①②③　　D. ①③④

9. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上恰有 3 个零点,则 ω 的取值范围是 (　　)

A. $\left[\frac{8}{3},\frac{11}{3}\right)\cup\left(4,\frac{14}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{11}{3},4\right)\cup\left[\frac{14}{3},\frac{17}{3}\right)$

C. $\left[\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right)\cup\left(5,\frac{17}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{14}{3},5\right)\cup\left[\frac{17}{3},\frac{20}{3}\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$0<\varphi<\pi$，$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立，且 $y=f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right)$ 上恰有 3 个零点，则 ω 的取值范围是 ______.

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,\varphi\in R)$ 在区间 $\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$ 上单调，且满足 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right)$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为（　　）

A. $\left(\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right]$　　B. $\left(\frac{8}{3},\frac{30}{11}\right]$　　C. $\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{5}{3},\frac{30}{11}\right]$

12. (2021• 北京) 函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$ 是（　　）

A. 奇函数，且最大值为 2　　B. 偶函数，且最大值为 2

C. 奇函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$　　D. 偶函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$

13. (2009• 全国卷Ⅰ) 若 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，则函数 $y=\tan(2x)\tan^3 x$ 的最大值为 ______.

14. (2020• 新课标III) 关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

①$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

②$f(x)$ 的图象关于原点对称.

③$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

④$f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是 ______.

15. (2019·新课标Ⅰ)关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:

①$f(x)$ 是偶函数

②$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增

③$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点

④$f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是(　　)

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

16. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+\cos|x|$,则下列结论正确的有(　　)

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

D. 方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 在区间 $[0,4\pi]$ 内的所有根的和为 8π

17. 对于函数 $f(x)=|\sin x|+\cos 2x$,下列结论正确得是(　　)

A. $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{9}{8}\right]$　　B. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称　　D. $f(x)$ 的最小正周期为 π

18. (2024·上海)已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,$\omega>0$.

(1)设 $\omega=1$,求解:$y=f(x)$,$x\in[0,\pi]$ 的值域;

(2)$a>\pi(a\in R)$,$f(x)$ 的最小正周期为 π,若在 $x\in[\pi,a]$ 上恰有 3 个零点,求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin x+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的对称中心；

(2) 设常数 $\omega>0$，若函数 $f(\omega x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，求 ω 的取值范围；

(3) 若函数 $g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)+af(x)-af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2，求 a 的值.

20. (2023 秋·聊城期末) 已知函数 $f(x)=4\sqrt{3}\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}+4\cos^2\frac{\omega x}{2}+1(\omega>0)$，$A$、$B$ 是 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 的两个相邻交点，且 $|AB|=\pi$.

(1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值；

(2) 若关于 x 的不等式 $f^2(x)-(3m+2)f(x)-m-13\leqslant 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

21. (2023 秋·安徽期末) 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-2\cos^2\left(\frac{\omega x+\varphi}{2}\right)+1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 图象的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $h(x)=f(x)+\sin x-\cos x$ 的最小值.

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，记方程 $g(x)=\frac{2}{3}$ 在 $x\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$ 上的根从小到大依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_{n-1},x_n$，试确定 n 的值，并求 $x_1+2x_2+2x_3+\cdots+2x_{n-1}+x_n$ 的值.

课堂总结

练 习

1. 函数 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)k\in Z$　　B. $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)k\in Z$

C. $\left(4k\pi-\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{\pi}{3}\right)k\in Z$　　D. $\left(k\pi-\frac{5\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)k\in Z$

2. 函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间是（　　）

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in Z)$　　B. $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right](k\in Z)$

C. $\left[k\pi+\frac{2\pi}{3},k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in Z)$　　D. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$

3. 把函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，函数 $g(x)$ 图像的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{6}$，若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增，则 ω 的取值范围是（　　）

A. 2 或 5　　B. 2 或 3　　C. 2　　D. 5