

第3讲：三个二次题型拓展与方法归纳

题型一：不等关系

1. 设 $c > 1$, $a = \sqrt{c+1} - \sqrt{c}$, $b = \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$, 则有 ()

A. $a > b$

B. $a < b$

C. $a = b$

D. a, b 的关系与 c 的值有关

2. 已知实数 a, b 满足 $0 < b < a < 1$, 且 $ab \neq 0$, 则下列不等式一定成立的是 ()

A. $2a - 2b > 0$

B. $a^3 > b^3$

C. $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$

D. $a - b < \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

3. 设 $a > b > 0$, $c \neq 0$, 则 ()

A. $ac^2 < bc^2$

B. $\frac{b}{a} < \frac{b+c^2}{a+c^2}$

C. $a^2 - \frac{1}{a} > b^2 - \frac{1}{b}$

D. $a^2 + \frac{1}{a} > b^2 + \frac{1}{b}$

4. 已知实数 x, y 满足 $-1 \leq x + y \leq 3$, $4 \leq 2x - y \leq 9$, 则 ()

A. $1 \leq x \leq 4$

B. $-2 \leq y \leq 1$

C. $2 \leq 4x + y \leq 15$

D. $\frac{1}{3} \leq x - y \leq \frac{23}{3}$

题型二：二次函数综合问题

5. 已知关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, 则关于 x 的不等式 $bx^2 - cx - a < 0$ 的解集为 _____.





6. 关于 x 的不等式 $-x^2 + 6ax - 3a^2 \geq 0 (a > 0)$ 的解集为 $[x_1, x_2]$, 则 $|x_1 - x_2| + \frac{\sqrt{6}a}{x_1x_2}$ 的最小值是 ()

A. 4

B. $2\sqrt{6}$

C. 2

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

7. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0 (k \in \mathbb{R})$ 的两个实根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的最大值为 ()

A. 18

B. 19

C. $5\frac{5}{9}$

D. 不存在

8. 关于 x 的不等式 $(ax-1)^2 < x^2$ 恰有 2 个整数解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}] \cup (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$ B. $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ C. $[-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$ D. $[-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}) \cup [\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$

9. 关于 x 的方程 $5x^2 - (a+9)x + a^2 - a - 2 = 0$ 的两根分别在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-3, -1)$ B. $(1 - \sqrt{7}, -1) \cup (3, 1 + \sqrt{7})$ C. $(-2, -1) \cup (2, 3)$ D. $(2, 6)$

10. 设不等式 $x^2 - 2ax - 1 \leq 0$ 的解集为 M , 若 $M \subseteq [-2, 2]$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-2, 2]$ B. $(-2, 2)$ C. $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ D. $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ 

- 



16. 已知二次函数 $g(x) = ax^2 + c$ ($a, c \in R$), $g(1) = 1$ 且不等式 $g(x) \leq x^2 - x + 1$ 对一切实数 x 恒成立.

(I) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(II) 在 (I) 的条件下, 设函数 $h(x) = 2g(x) - 2$, 关于 x 的不等式 $h(x-1) + 4h(m) \leq h\left(\frac{x}{m}\right) - 4m^2h(x)$, 在 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 有解, 求实数 m 的取值范围.







练习

1. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + b$, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < t\}$, $b, t \in R$.
 - (1) 求 b 和 t 的值;
 - (2) 若 $x \in [1, 4]$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象恒在 $y = kx^2$ 图象的上方, 求实数 k 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3$.
 - (I) 若 $a = 1$, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
 - (II) 已知 $a > 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 在 $[3, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

