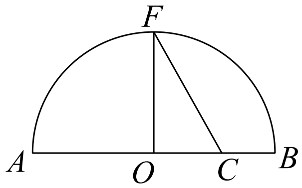
第 4 讲:基本不等式题型拓展与方法归纳

1.《几何原本》卷 2 的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据,通过这一原理,很多的代数的公理或定理都能够通过图形实现证明,也称之为无字证明.现有如图所示图形,点 F 在半圆 O 上,点 C 在直径 AB 上,且 $OF\perp AB$,设 $AC=a$,$BC=b$,则该图形可以完成的无字证明为(　　)



A. $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$　　B. $a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$

C. $\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$　　D. $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\,(a>0,b>0)$

2. 已知 a,b 为实数,则(　　)

A. $(a+b)^2\leqslant 4ab$,$a+b\leqslant\sqrt{2a^2+2b^2}$　　B. $(a+b)^2\geqslant 4ab$,$a+b\leqslant\sqrt{2a^2+2b^2}$

C. $(a+b)^2\leqslant 4ab$,$a+b\geqslant\sqrt{2a^2+2b^2}$　　D. $(a+b)^2\geqslant 4ab$,$a+b\geqslant\sqrt{2a^2+2b^2}$

3. 设 $a,b>0$,$a+b=5$,则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值为______.

4. 若 $a>0,b>0,a+b=2$,则下列不等式对一切满足条件的 a,b 恒成立的是______(写出所有正确命题的编号).

①$ab\leqslant 1$;②$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$;③$a^2+b^2\geqslant 2$;④$a^3+b^3\geqslant 3$;⑤$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2$

5. 已知正实数 x，y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，则 $2xy-2x-y$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 9

6. 已知 $m>0$，$xy>0$，当 $x+y=2$ 时，不等式 $\frac{4}{x}+\frac{m}{y}\geqslant\frac{9}{2}$ 恒成立，则 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

7. 已知正数 x、y，满足 $x+y=2$，则下列说法正确的是（　　）

A. xy 的最大值为 1　　B. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 2

C. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$　　D. $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}$ 的最小值为 1

8. 若 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2y}=1$，则 $2x+y$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

9. 已知正实数 a,b 满足 $a+2b=2$，则 $\frac{a^2+1}{a}+\frac{2b^2}{b+1}$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{17}{4}$　　D. $\frac{13}{3}$

10. 若 $a,b\in R^{+}$，$a+b=1$，则下列说法正确的有（　　）

A. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$ 的最小值为 4

B. $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$ 的最大值为 $\sqrt{6}$

C. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$

D. $\dfrac{2a}{a^{2}+b}+\dfrac{b}{a+b^{2}}$ 的最大值是 $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y+xy-3=0$，则下列结论正确的是（　　）

A. xy 的取值范围是 $(0,9]$

B. $x+y$ 的取值范围是 $[2,3)$

C. $x+2y$ 的最小值是 $4\sqrt{2}-3$

D. $x+4y$ 的最小值是 3

12. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=2ab-\dfrac{3}{2}$，则（　　）

A. $a>\dfrac{3}{4}$

B. $a+b\geqslant 3$

C. $ab\geqslant\dfrac{9}{4}$

D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{4}{3}$

13. (2022• 新高考 II) 若 x,y 满足 $x^{2}+y^{2}-xy=1$，则（　　）

A. $x+y\leqslant 1$

B. $x+y\geqslant -2$

C. $x^{2}+y^{2}\leqslant 2$

D. $x^{2}+y^{2}\geqslant 1$

14. 已知 $x>y>0$，则 $\dfrac{x^{2}+y^{2}}{xy-y^{2}}$ 的最小值是（　　）

A. $2+\sqrt{3}$

B. $\sqrt{5}+2$

C. $2\sqrt{2}+2$

D. 2

15. 已知实数 m,n 满足 $mn>0$，则 $\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{m}{m+3n}$ 的最大值为（　　）

A. $3+2\sqrt{3}$

B. $3-2\sqrt{3}$

C. $2+\sqrt{3}$

D. $2-\sqrt{3}$

16. 已知 $a>0,b>0,c>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c=2$，则 $\frac{ab}{a+b+ab}+\frac{1}{c}$ 的最小值为______.

17. 已知二次函数 $f(x)=ax^2-4x+c$ 的值域为 $[0,+\infty)$，则 ac 的值是 ______；$\frac{1}{c+1}+\frac{6}{a+6}$ 的最大值是 ______.

18. 已知二次函数 $f(x)=mx^2-2x+n(m,n\in R)$，若函数 $f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$，且 $f(1)\leqslant 2$，则 $\frac{m^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{m^2+1}$ 的取值范围是（　　）

A. $[0,12]$　　B. $[1,13]$　　C. $[2,12]$　　D. $[3,13]$

19. 已知 $a>0,b>0$，且 $ab=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为 ______.

20. (2021·天津) 已知 $a>0,b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 ______.

21. 若 $a>0$，$b>0$，$m=\dfrac{2(a^2+b^2)+4}{a+b}$，则 m 的最小值为（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 4　　D. 6

22. 已知实数 a，b 满足 $a>b>0$，则 $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{b}$ 的最小值为______.

23. 已知 $a>0, b>0, c>2$，且 $a+b=1$，则 $\dfrac{3ac}{b}+\dfrac{c}{ab}+\dfrac{6}{c-2}$ 的最小值是 ______.

课堂总结

练习

1. 已知 $x>0$，$y>0$，若 $\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -2$　　B. $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -4$

C. $-2<m<4$　　D. $-4<m<2$

2. 已知 $x>0,y>0$，且 $x+y=xy-3$，求 $x+2y$ 的最小值.

3. 若正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则（　　）

A. $ab\geqslant\frac{1}{4}$　　B. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geqslant\frac{4}{3}$

4. 已知正实数 a，b 满足 $b-ab=1$，则 $\frac{1}{a}+2b$ 的最小值是______.