



第9讲：奇偶性题型拓展与方法归纳

题型一：奇偶性的定义及常见的奇偶函数

1. $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，下列结论中，不正确的是 ()

A. $f(-x) + f(x) = 0$

B. $f(-x) - f(x) = -2f(x)$

C. $f(x) \cdot f(-x) \leq 0$

D. $\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$

2. (2023·乙卷) 已知 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

3. (2015·山东) 若函数 $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-a}$ 是奇函数，则使 $f(x) > 3$ 成立的 x 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(1, +\infty)$

4. (2015·湖南) 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ ，则 $f(x)$ 是 ()

A. 奇函数，且在 $(0, 1)$ 上是增函数

B. 奇函数，且在 $(0, 1)$ 上是减函数

C. 偶函数，且在 $(0, 1)$ 上是增函数

D. 偶函数，且在 $(0, 1)$ 上是减函数

5. (2020·新课标 II) 设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ ，则 $f(x)$ ()

A. 是偶函数，且在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增

B. 是奇函数，且在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 单调递减

C. 是偶函数，且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递增

D. 是奇函数，且在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 单调递减





6. (2023·新高考Ⅱ) 若 $f(x) = (x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

7. (2015·新课标Ⅰ) 若函数 $f(x) = x\ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

8. (2014·湖南) 若 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

9. 已知函数 $f(x) = \log_4(1 + 4^x) - \frac{1}{2}x$, 则下列说法中正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数

D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$

题型二: 奇偶性经典题型

10. (2019·新课标Ⅱ) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()

A. $e^{-x} - 1$

B. $e^{-x} + 1$

C. $-e^{-x} - 1$

D. $-e^{-x} + 1$

11. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别是 R 上的奇函数、偶函数, 且满足 $f(x) - g(x) = e^x$, 则有 ()

A. $f(2) < f(3) < g(0)$

B. $g(0) < f(3) < f(2)$

C. $f(2) < g(0) < f(3)$

D. $g(0) < f(2) < f(3)$





12. (2018·新课标III) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = \log_a(\sqrt{x^2+1} + x) + \frac{1}{a^x-1} + \frac{3}{2}$ ($a > 0, a \neq 1$), 如果 $f(\log_3 b) = 5$ ($b > 0, b \neq 1$), 那么 $f(\log_{\frac{1}{3}} b)$ 的值是 ()

- A. -3 B. 3 C. 5 D. -2

14. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{x}{x^2+1}$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 则 $m+n =$ ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

题型三: 奇偶性综合性问题

15. 定义在 R 上的奇函数在区间 $(-\infty, 0]$ 上是增函数, 且 $f(2m-1) + f(m+1) > 0$, 求实数 m 的范围.

16. 已知 $f(x) = x^3 + 3x$, $x \in R$, 且 $f(a-2) + f(a^2) < 0$, 则实数 a 的取值范围是 _____.





17. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 如果 $f(ax+1) \leq f(x-2)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-2, 1]$ B. $[-5, 0]$ C. $[-5, 1]$ D. $[-2, 0]$

18. 设函数 $f(x) = e^{1-|x|} + \frac{2-x^2}{1+x^2}$, 若 $f(ax) \geq f(x^2+4)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

题型四: 抽象函数的奇偶性 (大题)

19. 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$) 对任意不等于零的实数 x_1, x_2 都有 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

20. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的不恒为零的函数, 且对于任意的实数 a, b 都满足 $f(ab) = af(b) + bf(a)$.

(1) 求 $f(0), f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论.





21. (2023·新高考 I) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

22. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ 成立, 且 $f(0) \neq 0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 试判断 $f(x)$ 的奇偶性.

23. 定义在 R 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $f(3) = \log_2 3$ 且对任意 $x, y \in R$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。

(1) 求证: $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.





24. 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1, x_2 \in R$ 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$, 则下列说法一定正确的是 ()

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x) + 1$ 为奇函数

D. $f(x) + 1$ 为偶函数

25. 已知定义域为 R 的函数 $f(x) = \frac{-2^{x+1} + b}{2^x + a}$ 是奇函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $g(x) = |x|$, 若对任意的 $t \in R$, 任意 $m \in R$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < g(m)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

26. 已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) - kx$ 是偶函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 函数 $g(x) = f(x) - x - a$ 存在零点, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设函数 $h(x) = \log_3(m \cdot 3^x - 2m)$, 若函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象只有一个公共点, 求实数 m 的取值范围.







练习

1. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1 + \sqrt[3]{x})$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 表达式是 ()
- A. $-x(1 + \sqrt[3]{x})$ B. $x(1 + \sqrt[3]{x})$ C. $-x(1 - \sqrt[3]{x})$ D. $x(1 - \sqrt[3]{x})$
2. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{(a-2)x^2 + x + b + 1}{1+x^2}$ 是定义在 R 上的奇函数.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 证明: $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数;
- (3) 求不等式 $f(1 + 3x^2) + f(2x - x^2 - 5) > 0$ 的解集.
3. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + mx$.
- (1) 若 $f(x)$ 是偶函数, 求实数 m 的值;
- (2) 当 $m > 0$ 时, 关于 x 的方程 $f(8(\log_4 x)^2 + 2\log_2 \frac{1}{x} + \frac{4}{m} - m) = 1$ 在区间 $[1, 2\sqrt{2}]$ 上恰有两个不同的实数解, 求实数 m 的范围.

