第1讲:空间向量及其运算

题型一:空间向量基本运算及空间向量基本定理

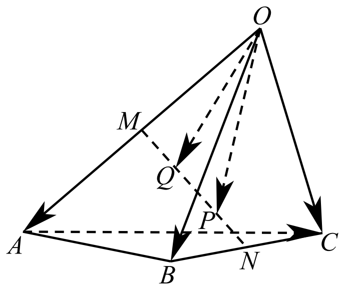
1. 如图,M,N分别是四面体$OABC$的边OA,BC的中点,P,Q是MN的三等分点,且$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,则向量$\overrightarrow{OQ}$可表示为(　　)

A. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

B. $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

C. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

D. $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$



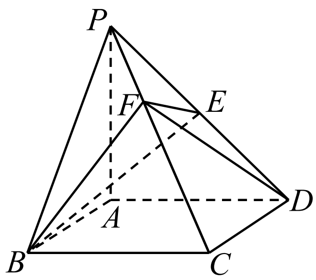
2. 如图,在四棱锥$P-ABCD$中,底面$ABCD$是平行四边形,$\overrightarrow{AP}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$,若$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FP}$,则(　　)

A. $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

B. $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$

C. $\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

D. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$



3. 已知$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$是空间的一个基底,则下列说法错误的是(　　)

A. 若$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$,则$x=y=z=0$

B. $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$两两共面,但$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$不共面

C. 一定存在x,y,使得$\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$

D. $\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{b}-\vec{c}$,$\vec{c}+2\vec{a}$一定能构成空间的一个基底

4. 已知$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$是空间中不共面的三个向量,则下列向量能构成空间的一个基底的是(　　)

A. $\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{c}$,$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

B. $\vec{a}$,$2\vec{b}$,$-3\vec{c}$

C. $\vec{a}$,$\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{c}$

D. $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$,$\vec{a}-\vec{b}$,$\vec{a}+\vec{c}$

5. 在以下命题中：

①三个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不能构成空间的一个基底，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面；

②若两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与任何一个向量都不能构成空间的一个基底，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线；

③对空间任意一点 O 和不共线的三点 A，B，C，若 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$，则 P，A，B，C 四点共面；

④若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}(\lambda,\mu\in R,\lambda,\mu\neq 0)$，则 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 构成空间的一个基底；

⑤若 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 为空间的一个基底，则 $\{\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c}+2\vec{a},\vec{c}+\vec{a}\}$ 构成空间的另一个基底；

其中真命题的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 下列条件中，使点 P 与 A，B，C 三点一定共面的是（　　）

A. $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$

B. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

7. 已知 P 为空间中任意一点，A、B、C、D 四点满足任意三点均不共线，但四点共面，且 $\overrightarrow{PA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}-x\overrightarrow{PC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$，则实数 x 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

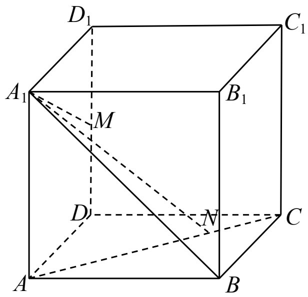
8. 已知向量 $\vec{a}=(2,1,-3)$，$\vec{b}=(1,-4,-2)$，$\vec{c}=(-1,22,m)$，若三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则实数 m 等于（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

9. 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，则使向量 $\vec{m}=2\vec{a}-\vec{b},\vec{n}=\vec{b}+\vec{c},\vec{p}=x\vec{a}+5\vec{b}+3\vec{c}$ 共面的实数 x 的值是（　　）

A. -4　　　B. -3　　　C. -2　　　D. 4

10. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 DD_1 的中点，N 在 AC 上，且 $AN:NC=2:1$，求证：$\overrightarrow{A_1N}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$、$\overrightarrow{A_1M}$ 共面.



11. (2024春•芝罘区月考) 已知空间向量 $\overrightarrow{OA}=\left(1,\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{OB}=(1,2,0),\overrightarrow{OC}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+2y+z=2$，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　B. $\sqrt{3}$　　　C. 2　　　D. 4

题型二：空间向量数量积及坐标运算

12. (2023秋•芜湖期末) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点 $A(0,1,-1)$，$B(1,1,2)$，点 A 关于 y 轴对称的点为 C，点 B 关于平面 xOz 对称的点为 D，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 的坐标为（　　）

A. $(-1,2,-1)$　　　B. $(1,-2,1)$　　　C. $(-1,0,1)$　　　D. $(1,0,-1)$

13. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $E(0,1,-1)$，$F(1,1,2)$，点 E 关于点 O 对称的点为 G，点 F 关于坐标平面 yOz 对称的点为 H，则 $|\overrightarrow{GH}|=$（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

14. 已知空间向量 $\vec{a}=(\lambda+1,2,3\mu-1)$，$\vec{b}=(6,2\lambda,0)$ 共线，则实数 λ 的值是（　　）

A. -3　　B. 2　　C. -3 或 2　　D. 3 或 -2

15. (2024春•兰州期中) 已知空间两点 $A(1,2,-1)$，$B(2,0,1)$，点 $P(-1,a,b)$ 在直线 AB 上运动，则 $ab=$ ______.

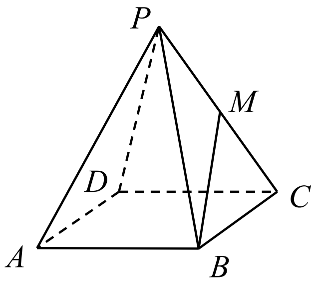
16. 光源 $P(3,2,1)$ 经过平面 Oyz 反射后经过 $Q(1,6,5)$，则反射点 R 的坐标为（　　）

A. $\left(0,\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$　　B. $(0,4,3)$　　C. $\left(0,\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$　　D. $(0,5,4)$

17. 已知 $\vec{a}=(1,-2,-1)$，$\vec{b}=(-1,x-1,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是 ______.

18. (2023秋·武汉模拟) 空间点 $A(x,y,z)$，$O(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},\sqrt{2},2)$，若 $|AO|=1$，则 $|AB|$ 的最小值为______.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，侧棱 PA 的长为1，且 PA 与 AB，AD 的夹角都等于 $60°$．若 M 是 PC 的中点，则 $|\overrightarrow{BM}|=$（　　）



A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

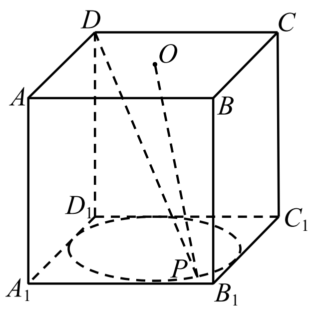
20. (2024春·龙岩期中) 设 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点 Q 在直线 OP 上运动，则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

21. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 P 是四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的内切圆上一点，O 为四边形 $ABCD$ 的中心，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 的最大值为（　　）

A. 5　　B. 6

C. $5+\sqrt{2}$　　D. $5+\sqrt{3}$



22. 正四面体的棱长为3，点 M，N 是它内切球球面上的两点，P 为正四面体表面上的动点，当线段 MN 最长时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{9}{4}$　　C. 3　　D. $\dfrac{5}{2}$

23. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BB_1 的中点，P 是正方体内（含边界）一点，满足 $C_1P\perp A_1E$，若 $AB=2$，则 $\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{PD_1}$ 的取值范围是______.

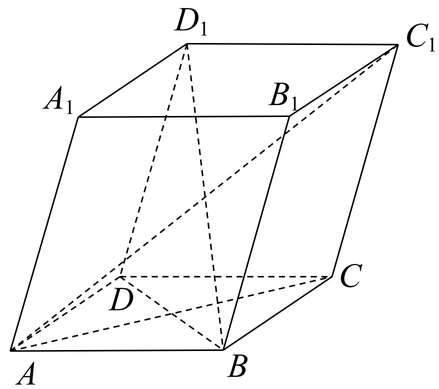
24. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱长都为1，且 $\angle DAB=\angle DAA_1=\angle BAA_1=60°$，则下列说法中正确的有（　　）

A. $AC_1\perp BD$

B. $BD_1=\sqrt{6}$

C. $BD\perp$ 平面 ACC_1

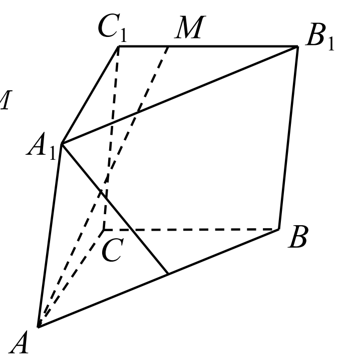
D. 直线 BD_1 与 AC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$



25. 如图所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\vec{c}$，$CA=CB=CC_1=1$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，$\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，$N$ 是 AB 中点.

(1) 用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{A_1N}$；

(2) 在线段 C_1B_1 上是否存在点 M，使 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{A_1N}$？若存在，求出 M 的位置，若不存在，说明理由.



课堂总结

作业

1. 在三棱锥 $O-ABC$ 中，G 是 $\triangle ABC$ 的重心．设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，以 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为基向量表示 $\overrightarrow{OG}$，则 $\overrightarrow{OG}=$______．

2. 在下列条件中，使 M 与 A，B，C 一定共面的是（　　）

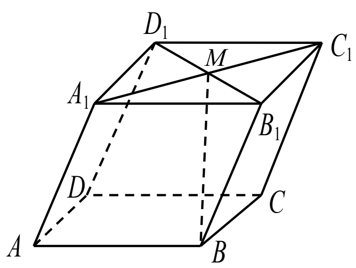
A. $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$　　B. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$　　D. $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点．若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{BM}$ 相等的向量是（　　）

A. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$



4. 若向量 $\vec{a}=(7,\lambda,8)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$，$\vec{c}=(2,3,1)$，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则 $\lambda=$ ______.

5. 若向量 $\vec{a}=(x,-1,1)$ 与 $\vec{b}=(3,1,-2)$ 的夹角为钝角，则实数 x 的取值范围为 ______.

6. 若向量 $\vec{a}=(x,-4,-5)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{6}$，则实数 x 的值为（　　）

A. -3　　B. 11

C. 3　　D. -3 或 11