第 10 讲：圆锥曲线解答题初步

1. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，直线 $l:y=x+m$ 与椭圆 C 分别相交、相切、相离时，求 m 的取值范围.

2. 已知以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点，则椭圆的长轴长为（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{2}$

3. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，直线 l 过点 $(0,2)$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，且坐标原点 O 在以 AB 为直径的圆外，求直线 l 斜率的取值范围.

4. 设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 为椭圆 C 左右焦点，B 为短轴端点，且 $S_{\triangle BF_1F_2}=4$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，O 为坐标原点.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ) 是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 C 恒有两个交点 M、N，且满足 $|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$？若存在，求出该圆的方程，若不存在，说明理由

5. (2024• 北京) 已知椭圆方程 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形. 过点 $(0,t)$ $(t>\sqrt{2})$ 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，过点 A 和 $C(0,1)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D.

(1) 求椭圆 E 的方程及离心率;

(2) 若直线 BD 的斜率为 0，求 t 的值.

6. (2024• 天津) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $\mathrm{e}=\frac{1}{2}$，左顶点为 A，下顶点为 B，C 是线段 OB 的中点，其中 $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线与椭圆有两个交点 P，Q，在 y 轴上是否存在点 T 使得 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$ 恒成立. 若存在，求出这个 T 点纵坐标的取值范围；若不存在，请说明理由.

7. (2024·甲卷) 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $P(4,0)$ 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 与 MF 交于 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

8. (2022·北京) 已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程；

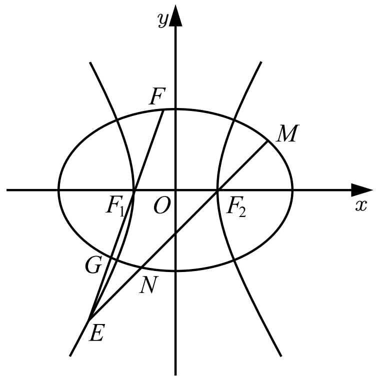
(Ⅱ) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N. 当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

9．已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1(a>\sqrt{6})$，$C_1$ 的左右焦点 F_1，F_2 是双曲线 C_2 的左右顶点，C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，C_2 的离心率为 $\sqrt{2}$，点 E 在 C_2 上，过点 E 和 F_1，F_2 分别作直线交椭圆 C_1 于 F，G 和 M，N 点，如图．

(1) 求 C_1，C_2 的方程；

(2) 求证：直线 EF_1 和 EF_2 的斜率之积为定值；

(3) 求证：$\dfrac{1}{|FG|}+\dfrac{1}{|MN|}$ 为定值．



10．(2023•上海) 已知椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(m>0$ 且 $m\neq\sqrt{3})$．

(1) 若 $m=2$，求椭圆 Γ 的离心率；

(2) 设 A_1、A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点，椭圆 Γ 上一点 E 的纵坐标为 1，且 $\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{EA_2}=-2$，求实数 m 的值；

(3) 过椭圆 Γ 上一点 P 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l，若直线 l 与双曲线 $\dfrac{y^2}{5m^2}-\dfrac{x^2}{5}=1$ 有且仅有一个公共点，求实数 m 的取值范围．

11. (2024·新高考Ⅰ) 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B,且 ΔABP 的面积为 9,求 l 的方程.

12. 与直线 $x+y-\sqrt{2}=0$ 仅有一个公共点的曲线是 (　　)

A. $x^2+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　C. $x^2-y^2=1$　　D. $y^2=x$

13. 若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点,则 k 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

C. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},0\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$

课堂总结

作业

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F_1(-1,0)$ 且点 $P(0,1)$ 在 C_1 上.

(1) 求椭圆 C_1 的方程；

(2) 设直线 l 同时与椭圆 C_1 和抛物线 C_2：$y^2=4x$ 相切，求直线 l 的方程.