第 9 讲：圆锥曲线综合性问题

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点是 F_1,F_2. 若 A,B 关于坐标原点对称，则 ΔABF_2 周长的最小值是 ______.

2. (2013• 辽宁) 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F，C 与过原点的直线相交于 A，B 两点，连结 AF，BF，若 $|AB|=10$，$|AF|=6$，$\cos\angle ABF=\frac{4}{5}$，则 C 的离心率为 (　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{5}{7}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{6}{7}$

3. (2021 全国 II) 已知 F_1，F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 两个焦点，P，Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为 ______.

4. 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点是 F_1，F_2，点 P 为椭圆 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径 r 为 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. 2

5. (2020全国Ⅰ)设F_1,F_2是双曲线C:$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的两个焦点,O为坐标原点,点P在C上且$|OP|=2$,则$\triangle PF_1F_2$的面积为(　　)

A. $\frac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

6. (2023·甲卷)已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$,$F_1$,$F_2$为两个焦点,$O$为原点,$P$为椭圆上一点,$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$,则$|PO|=$(　　)

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

7. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的左右焦点为$F_1$,$F_2$,$P$在椭圆上,若$P$,$F_1$,$F_2$是一个直角三角形的三个顶点,则点$P$到$x$轴的距离为(　　)

A. $\frac{9}{5}$　　B. 3　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{9}{4}$

8. (2019·新课标Ⅱ)已知F_1,F_2是椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点,$P$为$C$上的点,$O$为坐标原点.

(1)若$\triangle POF_2$为等边三角形,求C的离心率;

(2)如果存在点P,使得$PF_1\perp PF_2$,且$\triangle F_1PF_2$的面积等于16,求b的值和a的取值范围.

9. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，P，Q 为 C 上的动点，$|PF_2|$ 的最大值为 6，则下列结论中正确的是（　　）

A. 椭圆 C 的短轴长为 $4\sqrt{3}$

B. 当 P，Q 分别在 x 轴的上方和下方时四边形 PF_1QF_2 的周长的取值范围是 $(8,16]$

C. 存在四个不同的点 P，使得 $\angle F_1PF_2=60^\circ$

D. 若 $\triangle PF_1F_2$ 为锐角三角形，则点 P 横坐标的取值范围是 $(-2,2)$

10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点是 F_1,F_2. 若 P 为其上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$, 则椭圆离心率 e 的取值范围为 ______.

11. (2017 全国 Ⅰ 文) 设 A,B 是椭圆 C:$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, 则 m 的取值范围是（　　）

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

12. 已知点 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上的一点，F_1,F_2 是它的左、右焦点,O 为坐标原点，$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，且 $|\overrightarrow{PF_1}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{PF_2}|$，则双曲线的离心率为 ______.

13. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，点 M 与 C 的焦点不重合，若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A、B，线段 MN 的中点在 C 上，则 $|AN|+|BN|=$ ______.

14. 已知点 M 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的任意一点，F_2 是它的右焦点，则以 MF_2 为直径的圆与圆 O:$x^2+y^2=a^2$ 的位置关系为（　　）

A. 内切　　B. 外切　　C. 外切或内切　　D. 无公共点或相交

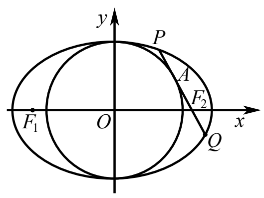
15. 已知点 M 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 右支上的任意一点，F_2 是它的右焦点，则以 MF_2 为直径的圆与圆 O：$x^2+y^2=a^2$ 的位置关系是（　　）

A. 内切　　B. 外切　　C. 外切或内切　　D. 无公共点或相交

16. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切于点 A，并与椭圆 C 交于不同的两点 P，Q，如图，若 A，F_2 为线段 PQ 的三等分点，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$



17. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M，N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

18. 已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左右焦点，P 是椭圆上任意一点，从焦点 F_2 引 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线的垂线，垂足为 Q，则 Q 点的轨迹为 ______.

19. (2010·安徽) 椭圆 E 经过点 $A(2,3)$，对称轴为坐标轴，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率 $\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ) 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线的方程.

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点 P 是椭圆上除长轴端点外的任一点，连接 PF_1,PF_2, 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交椭圆的长轴于点 $M(m,0)$，求 m 的取值范围.

21. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，B 是椭圆 C 的下顶点，点 A 在椭圆 C 上且位于第一象限．若 $|F_1A|=3|F_2A|$，且 AB 平分 $\angle F_1AF_2$，则椭圆的离心率为 ______.

22. P 是双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右支上一点，F_1，F_2 分别为双曲线的左、右焦点，则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心横坐标为（　　）.

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. 3

23. 已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上任意一点（不在 x 轴上），$\triangle PF_1F_2$ 外接圆的圆心为 H，半径为 R，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心为 I，半径为 r，直线 PI 交 x 轴于点 M，O 为坐标原点，则（　　）

A. $S_{\triangle PF_1F_2}$ 最大时，$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PO}$ 的最小值为 2

C. 椭圆 C 的离心率等于 $\frac{|PI|}{|IM|}$

D. $R\cdot r$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

课堂总结

作业

1. 已知 F_1、F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左右焦点，点 P 在椭圆上且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积并求出点 P 的坐标.

2. 已知 F_1、F_2 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b=$______.

3. 已知 F_1、F_2 为双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 P 到 x 轴的距离为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

4. (2020• 新课标III) 设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$. P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4，则 $a=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

5. 椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上，那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的（　　）

A. 7 倍　　B. 5 倍　　C. 4 倍　　D. 3 倍

6. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1$（$a$ 为定值，且 $a>\sqrt{5}$）的左焦点为 F，直线 $x=m$ 与椭圆交于点 A，B，$\triangle FAB$ 的周长的最大值是 12，则该椭圆的离心率是 ______.