第 1 讲:空间向量题型拓展 (1)

1. (2023 秋·重庆期末) 给出下列命题,其中正确的是 (　　)

A. 任意向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

B. 在空间直角坐标系中,点 $P(-1,3,5)$ 关于坐标平面 Oyz 的对称点是 $P'(1,3,5)$

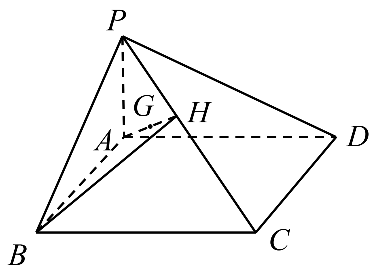
C. 已知 $\vec{a}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3$,$\vec{b}=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$,$\vec{c}=-3\vec{e}_1+7\vec{e}_2$,$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 为空间向量的一个基底,则向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 能共面

D. 已知 $A(-1,1,2)$,$B(2,2,4)$,$C(3,-2,0)$,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量是 $\frac{11}{14}(3,1,2)$

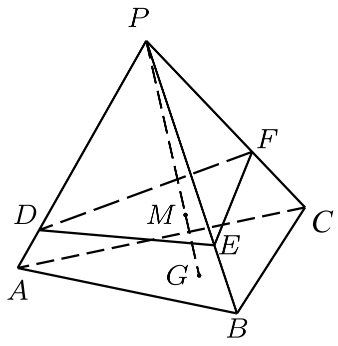
2. 在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中,点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+(1-x-y)\overrightarrow{AD}$,点 N 满足 $\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DA}-(\lambda-1)\overrightarrow{DB}$,当 AM、DN 最短时,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=$ (　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 如图,H 为四棱锥 $P-ABCD$ 的棱 PC 的三等分点,且 $PH=\frac{1}{2}HC$,点 G 在 AH 上,$AG=mAH$.四边形 $ABCD$ 为平行四边形,若 G,B,P,D 四点共面.求 m 的值.



4. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，点 G 为 ΔABC 的重心，点 M 在 PG 上，且 $PM=3MG$，过点 M 任意作一个平面分别交线段 PA，PB，PC 于点 D，E，F，若 $\overrightarrow{PD}=m\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PE}=n\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PF}=t\overrightarrow{PC}$，求证：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{t}$ 为定值，并求出该定值.



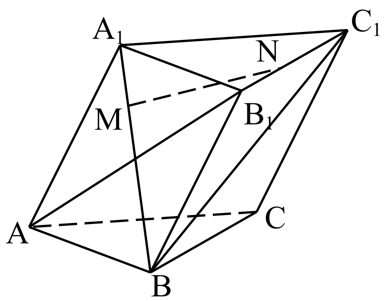
5. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M，N 分别是 A_1B，B_1C_1 上的点，且 $BM=2A_1M$，$C_1N=2B_1N$，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. 若 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，$AB=AC=AA_1=1$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

B. 若 $\overrightarrow{MN}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，则 $x+y+z=1$

C. $|\overrightarrow{MN}|=\frac{5}{9}$

D. 直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{6}$



6. (2023 秋 • 西安期末) 已知空间中三个点 $A(1,1,0)$、$B(0,1,1)$，$C(0,3,0)$ 组成一个三角形，分别在线段 AB、AC，BC 上取 D、E、F 三点，当 ΔDEF 周长最小时，直线 CD 与直线 BE 的交点坐标为（　　）

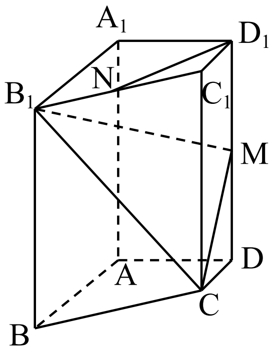
A. $\left(\frac{2}{3},2,\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{4}{9},\frac{11}{9},\frac{4}{9}\right)$　　C. $\left(\frac{7}{9},2,\frac{7}{9}\right)$　　D. $\left(\frac{5}{9},\frac{13}{9},\frac{5}{9}\right)$

7.（2024 天津）已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\parallel CD$，$A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，其中 $AB=AA_1=2$，$AD=DC=1$．N 是 B_1C_1 的中点，M 是 DD_1 的中点．

(1) 求证 $D_1N\parallel$ 平面 CB_1M；

(2) 求平面 CB_1M 与平面 BB_1CC_1 的夹角余弦值；

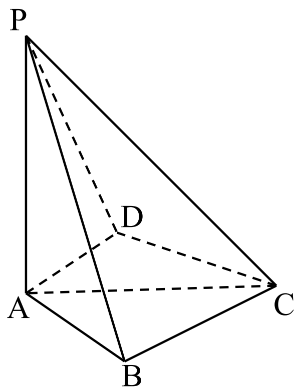
(3) 求点 B 到平面 CB_1M 的距离．



8.（2024 新高考 Ⅰ）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$．

(1) 若 $AD\perp PB$，证明：$AD\parallel$ 平面 PBC；

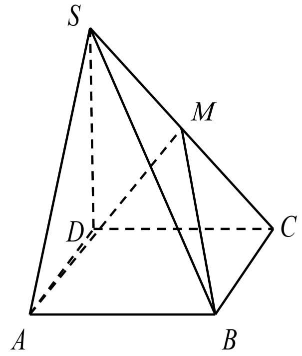
(2) 若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD．



9. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，$DC=SD=2$，点 M 在侧棱 SC 上，$\angle ABM=60^\circ$.

(I) 证明：M 在侧棱 SC 的中点；

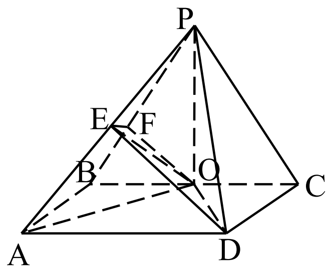
(II) 求二面角 $S-AM-B$ 的大小.



10. (2024·安徽模拟) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，ΔPBC 为等边三角形，底面 $ABCD$ 是矩形，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，O，E 分别为线段 BC，PA 的中点，点 F 在线段 PB 上(不包括端点).

(1) 若 $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$，求证：点 O，D，E，F 四点共面；

(2) 若 $BC=2AB=2$，是否存在点 F，使得 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$，若存在，求出 $\frac{PF}{BF}$，若不存在，请说明理由.



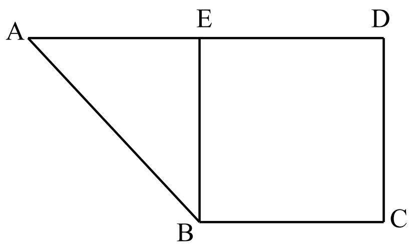
11. 如图 (1) 在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle CDA = 90^\circ$，$AD = 2$，$BC = CD = 1$，$BE \perp AD$，沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折起得到四棱锥 $A - BCDE$，如图 (2) 所示.

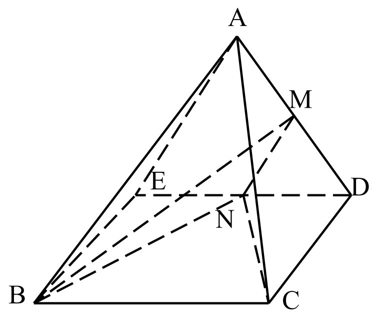
(1) 证明：平面 $AED \perp$ 平面 $BCDE$；

(2) 若二面角 $A - BE - D$ 的大小为 60°，M，N 分别是 AD，DE 的中点.

(i) 求 CN 与平面 ACD 所成角的正弦值；

(ii) 在棱 AC 上是否存在点 G，使得 $DG \parallel$ 平面 BMN？若存在，求出 $AG : GC$ 的值；若不存在，说明理由.

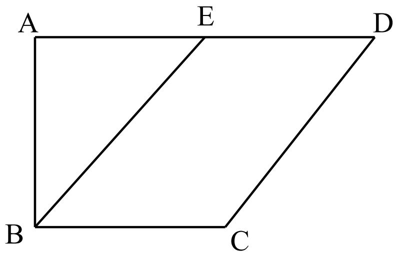


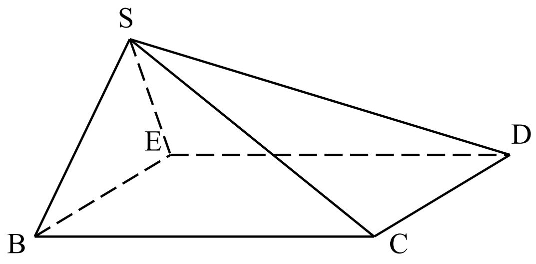


12. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle BAD = 90^{\circ}$，且 $AB = BC = \frac{1}{2}AD$，E 是 AD 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle SBE$ 的位置，使平面 $SBE \perp$ 平面 $BCDE$.

(1) 求二面角 $B-SC-D$ 的正弦值；

(2) 在直线 SB 上是否存在点 P，使 $PD \perp$ 平面 SBC？若存在，请求出点 P 所在的位置；若不存在，请说明理由.



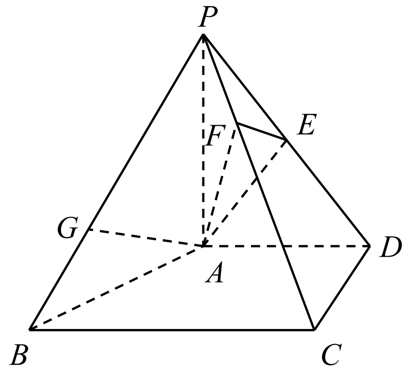


13. (2019·北京) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD\parallel BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$. E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求证：$CD\perp$ 平面 PAD；

(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值；

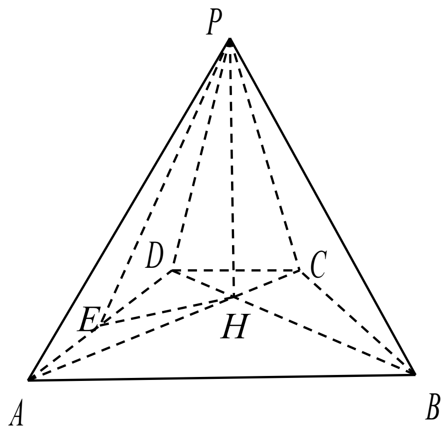
(3) 设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由.



14. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形，$AB\parallel CD$，$AC\perp BD$ 垂足为 H，PH 是四棱锥的高，垂足为 H，E 为 AD 的中点.

(1) 证明：$PE\perp BC$；

(2) 若 $\angle APB=\angle ADB=60^\circ$，求直线 PA 与平面 PEH 所成角的正弦值.



课堂总结

作业

1. 在各棱长都等于 1 的正四面体 $O-ABC$ 中，若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$，则 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ 的最小值为 ______.

2. 如图三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$.
   (Ⅰ) 证明：$AC=AB_1$；
   (Ⅱ) 若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60^o$，$AB=BC$，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.