第10讲：圆锥曲线解答题之面积问题

题型一：对角线垂直的四边形

1. (2016全国Ⅰ)设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C,D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

   (Ⅰ)证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

   (Ⅱ)设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M,N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P,Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

2. (2023·甲卷)已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 A，B 两点，$|AB|=4\sqrt{15}$.

   (1)求 p；

   (2)设 F 为 C 的焦点，M，N 为 C 上两点，且 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

题型二：ΔOAB面积问题

3. (2014全国Ⅰ)已知点$A(0,-2)$，椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$F$是椭圆的右焦点，直线$AF$的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$O$为坐标原点.

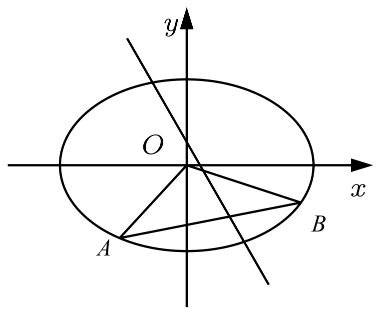
(1) 求E的方程；

(2) 设过点A的直线l与E相交于P,Q两点，当ΔOPQ的面积最大时，求l的方程.

4. 已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上两个不同的点A,B关于直线$y=mx+\frac{1}{2}$对称.

(1) 求实数m的取值范围；

(2) 求ΔAOB面积的最大值(O为坐标原点).



5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，上、下顶点分别为 B_2、B_1，O 为坐标原点，四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的面积为 4，且该四边形内切圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 M、N 是椭圆 C 上的两个不同的动点，直线 OM、ON 的斜率之积等于 $-\frac{1}{4}$，试探求 ΔOMN 的面积是否为定值，并说明理由.

题型三：底乘高

6. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$ 的离心率 $\mathrm{e}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，右焦点 $F(c,0)$，过点 $A\left(\frac{a^2}{c},0\right)$ 的直线交椭圆 E 于 P,Q 两点.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 若点 P 关于 x 轴的对称点为 M，求证:M,F,Q 三点共线；

(3) 当 ΔFPQ 面积最大时，求直线 PQ 的方程.

7. (2023· 天津) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2,右焦点为 F,已知 $|A_1F|=3$, $|A_2F|=1$.

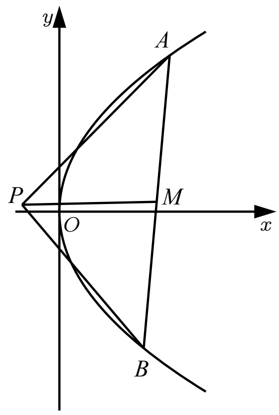
(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 已知点 P 是椭圆上一动点(不与顶点重合),直线 A_2P 交 y 轴于点 Q,若 $\triangle A_1PQ$ 的面积是 $\triangle A_2FP$ 面积的二倍,求直线 A_2P 的方程.

8. (2018· 浙江) 如图,已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点,抛物线 C: $y^2=4x$ 上存在不同的两点 A, B 满足 PA, PB 的中点均在 C 上.

(1) 设 AB 中点为 M,证明: PM 垂直于 y 轴;

(2) 若 P 是半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$ 上的动点,求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.



题型四：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

9. (2024·济南模拟) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的左右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 M，N 两点.

(1) 若直线 l 的斜率 k 存在，求 k 的取值范围；

(2) 记直线 A_1M，A_2N 的斜率分别为 k_1，k_2，求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值；

(3) 设 G 为直线 A_1M 与直线 A_2N 的交点，ΔGMN，$\triangle GA_1A_2$ 的面积分别为 S_1，S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.

课堂总结

作业

1. 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点,坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.