第11讲:圆锥曲线解答题之定点问题

1. 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$，A,B 为抛物线上两动点，满足 $OA\perp OB$，O 为坐标原点，证明：直线 AB 过定点.

2. (2020新高考Ⅰ卷) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

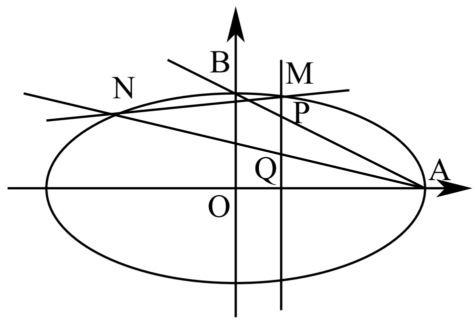
(1) 求 C 的方程；

(2) 点 M,N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足，证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

3. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为4，由 E 的三个顶点构成的三角形的面积为2.

(1) 求 E 的方程；

(2) 记 E 的右顶点和上顶点分别为 A，B，点 P 在线段 AB 上运动，垂直于 x 轴的直线 PQ 交 E 于点 M(点 M 在第一象限)，P 为线段 QM 的中点，设直线 AQ 与 E 的另一个交点为 N，证明：直线 MN 过定点.



4. (2020 全国Ⅰ) 已知 A,B 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程；

(2) 证明：直线 CD 过定点.

5. (2023·乙卷) 已知椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，点 $A(-2,0)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过点 $(-2,3)$ 的直线交 C 于点 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴的交点分别为 M，N，证明：线段 MN 的中点为定点.

6. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F，半焦距 $c=2$，点 F 到直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的距离为 $\frac{1}{2}$，过点 F 作双曲线 C 的两条互相垂直的弦 AB，CD，设 AB，CD 的中点分别为 M，N.

(1) 求双曲线 C 的标准方程；

(2) 证明：直线 MN 必过定点，并求出此定点的坐标.

7. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，P 为抛物线上一点，$|OP|=|PF|$，且 $\triangle OFP$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，其中 O 为坐标原点.

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 已知点 $Q(-2,0)$，不垂直于 x 轴的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，若直线 AQ，BQ 关于 x 轴对称，求证：直线 l 过定点并写出定点坐标.

8. 已知圆 A_1:$(x+1)^2+y^2=16$,直线 l_1 过点 $A_2(1,0)$ 且与圆 A_1 交于点 B,C,BC 中点为 D,过 A_2C 中点 E 且平行于 A_1D 的直线交 A_1C 于点 P,记 P 的轨迹为 Γ.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 坐标原点 O 关于 A_1,A_2 的对称点分别为 B_1,B_2,点 A_1,A_2 关于直线 $y=x$ 的对称点分别为 C_1,C_2,过 A_1 的直线 l_2 与 Γ 交于点 M,N,直线 B_1M,B_2N 相交于点 Q.请从下列结论中,选择一个正确的结论并给予证明.

(1)$\triangle QB_1C_1$ 的面积是定值;(2)$\triangle QB_1B_2$ 的面积是定值;(3)$\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值.

9. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $(0,-1)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过 $M(0,m)(-1<m<0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，试问：在椭圆 C 上是否存在定点 T，使得无论直线 l 如何转动，以 AB 为直径的圆恒过定点 T? 若存在，求出 m 的值及点 T 的坐标；若不存在，请说明理由.

10. (2022• 甲卷) 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF|=3$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 MD，ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN，AB 的倾斜角分别为 α，β. 当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.

课堂总结

作业

1. (2017·新课标Ⅰ)已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点$P_1(1,1)$,$P_2(0,1)$,$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$中恰有三点在椭圆上.

(1)求C的方程;

(2)设直线l不经过P_2点且与C相交于A、B两点,若直线P_2A与直线P_2B直线的斜率的和为-1,证明:l过定点.