



第12讲：圆锥曲线解答题之定值问题

1. (2009·辽宁) 已知, 椭圆 C 过点 $A(1, \frac{3}{2})$, 两个焦点为 $(-1, 0), (1, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) E, F 是椭圆 C 上的两个动点, 如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数, 证明直线 EF 的斜率为定值, 并求出这个定值.

2. (2022 新高考 I) 已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 PAQ 的面积.





3. (2023·新高考Ⅱ) 已知双曲线 C 中心为坐标原点, 左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于 P , 证明 P 在定直线上.
4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右顶点为 A, B , 直线 l 过点 $P(1, 0)$ 与椭圆交于 M, N , 直线 AM, BN 交于点 Q ,
- 求证:
- (1) Q 在一定直线上.
- (2) $\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$ 为定值.





5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, O 是坐标原点, F_1, F_2 分别为其左右焦点, $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, M 是椭圆上一点, $\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $\frac{2}{3}\pi$

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$

(i) 求证: $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 为定值;

(ii) 求 ΔOPQ 面积的取值范围.

6. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 点 A, B 在双曲线右支上, O 为坐标原点.

(1) 若过点 A 作双曲线的两条渐近线的平行线, 分别交两条渐近线于点 M, N , 证明: 平行四边形 $OMAN$ 的面积为定值;

(2) 若 $OA \perp OB$, $OD \perp AB$, D 为垂足, 求点 D 的轨迹的长度.





7. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的对称轴上的定点 $M(m, 0) (m > 0)$, 作直线 AB 与抛物线相交于 A, B 两点.

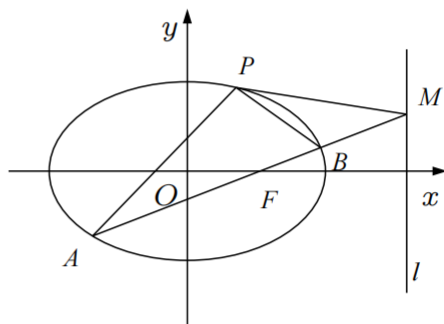
(1) 试证明 A, B 两点的纵坐标之积为定值;

(2) 若点 N 是定直线 $l: x = -m$ 上任意一点, 求证: 三条直线 AN, MN, BN 的斜率成等差数列.

8. (2013·江西) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.





9. 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 它的一个顶点恰好是抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点, 离心率等于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

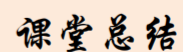
(2) 过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 y 轴于 M 点, 若 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$, 求证: $\lambda_1 + \lambda_2$ 为定值.

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 点 $P(4, \sqrt{3})$ 在 C 上.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过点 $(1, 0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 问在 x 轴上是否存在定点 Q , 使得 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 为常数? 若存在, 求出 Q 点坐标及此常数的值, 若不存在, 说明理由.







作业

1. 如图, 抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点, 点 $P(1, 2)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 均在抛物线上.
- (I) 写出该抛物线的方程及其准线方程;
- (II) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 求 $y_1 + y_2$ 的值及直线 AB 的斜率.

