第13讲:圆锥曲线解答题之相切问题

1. (2016•新课标Ⅰ文)在直角坐标系xOy中,直线$l: y=t(t\neq 0)$交y轴于点M,交抛物线$C: y^2=2px(p>0)$于点P,M关于点P的对称点为N,连结ON并延长交C于点H.

(Ⅰ)求$\frac{|OH|}{|ON|}$;

(Ⅱ)除H以外,直线MH与C是否有其它公共点?说明理由.

2. (2022•天津)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$、右顶点为$A$,上顶点为$B$,且满足$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆的离心率e;

(2)直线l与椭圆有唯一公共点M,与y轴相交于N(N异于M).记O为坐标原点,若$|OM|=|ON|$,且$\triangle OMN$的面积为$\sqrt{3}$,求椭圆的标准方程.

3. (2019·新课标III) 已知曲线 C：$y=\frac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\frac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A，B.

(1) 证明：直线 AB 过定点.

(2) 若以 $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求该圆的方程.

4. 设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$，M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点，过 M 引抛物线的切线，切点分别为 A，B.

(Ⅰ) 求证：A，M，B 三点的横坐标成等差数列；

(Ⅱ) 已知当 M 点的坐标为 $(2,-2p)$ 时，$|AB|=4\sqrt{10}$. 求此时抛物线的方程；

5. (2021·乙卷) 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p；

(2) 若点 P 在 M 上，PA，PB 为 C 的两条切线，A，B 是切点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

6. (2021 全国 II) 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，直线 $l:x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$，已知点 $M(2,0)$，且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 C，$\odot M$ 的方程；

(2) 设 A_1，A_2，A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切，判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系，并说明理由.

7. 已知点 P 为圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 上任意一点，$A(-2,0)$，线段 PA 的垂直平分线交直线 PC 于点 M，设点 M 的轨迹为曲线 H.

(1) 求曲线 H 的方程；

(2) 若过点 M 的直线 l 与曲线 H 的两条渐近线交于 S，T 两点，且 M 为线段 ST 的中点.

(i) 证明：直线 l 与曲线 H 有且仅有一个交点；

(ii) 求 $\dfrac{2}{|OS|}+\dfrac{1}{|OT|}$ 的取值范围.

8. （2013 广东文）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

9. 已知两动点 A,B 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上，动点 P 在直线 $3x+4y-10=0$ 上，若 $\angle APB$ 恒为锐角，则椭圆 C 的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$

10. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为"画法几何创始人"、"微分几何之父". 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 若椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的蒙日圆为 $C:x^2+y^2=\frac{3}{2}a^2$，过 C 上的动点 M 作 Γ 的两条切线，分别与 C 交于 P,Q 两点，直线 PQ 交 Γ 于 A,B 两点，则（）

A. 椭圆 Γ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}a^2$

C. M 到 Γ 的左焦点的距离的最小值为 $(2-\sqrt{2})a$

D. 若动点 D 在 Γ 上，将直线 DA,DB 的斜率分别记为 k_1,k_2，则 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$

课堂总结

作业

1. 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外一点，且过点 P 作抛物线的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.