第 14 讲：等差数列经典结论总结

题型一：等差数列基本量的求解

1. (2018 全国卷 I) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则 $a_5=$ (　　)

A. -12　　B. -10　　C. 10　　D. 12

2. (2019 全国III) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1\neq 0$，$a_2=3a_1$，则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$ ______．

3. 设为 S_n 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 S_1、S_2、S_4 成等比数列，$S_2=2a_1+2$，当 $6a_n-S_n$ 取得最大值时，$n=$ (　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和为 S_n，则“$S_1+S_3<2S_2$”是“$\{a_n\}$ 为递减数列”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

题型二:等差数列的性质

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_3+a_8=10$,则 $3a_5+a_7=$ ______.

6. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列,则 $|m-n|=$ ______.

题型三:等差数列前 n 项和经典结论

7. (2024•甲卷) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $S_9=1$,$a_3+a_7=$ (　　)

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0,S_{2m-1}=38$,则 $m=$ ______.

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数,公差为 2,前 n 项和为 S_n,若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也是等差数列,则 $a_1=$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

10. 两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其公差分别为 d_1 和 d_2, 其前 n 项和分别为 S_n 和 T_n, 则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 为等差数列, 则 $d_1=2a_1$

B. 若 $\{S_n+T_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1+d_2=0$

C. 若 $\{a_nb_n\}$ 为等差数列, 则 $d_1=d_2=0$

D. 若 $b_n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\{a_{b_n}\}$ 也为等差数列, 且公差为 d_1+d_2

11. 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是两个等差数列，它们的前 n 项和为 S_n 和 T_n，若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$，则 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的个数是 ______.

12. (2024•辽宁模拟) 等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n，且 $\dfrac{S_{2n}}{T_n}=\dfrac{4n}{3n+1}$，则（　　）

A. 当 $a_n=2n-1$ 时，$T_4=52$

B. 当 $S_n=n^2$ 时，$b_n=3n-1$

C. $4(a_4+a_7)=5b_3$

D. $\dfrac{a_4+a_{11}}{b_4}>2$

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，e 是自然对数的底数，则下列说法正确的是（　　）

A. 当 $m\in N^*$ 时，S_m，S_{2m}，S_{3m} 是等差数列

B. 数列 $\{e^{a_n}\}$ 是等比数列

C. 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列

D. 当 p，q 均为正整数且 $p\neq q$ 时，$\dfrac{S_{p+q}}{p+q}=\dfrac{S_p-S_q}{p-q}$

14. (2013 全国 Ⅰ) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{m-1}=-2, S_m=0, S_{m+1}=3$，则 m ______.

15. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=6, S_8=10$, 则 $\dfrac{S_{16}}{S_{12}}=$ ______.

16. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=2, S_6=12$, 则 $S_8=$ ______.

17. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=20$, 前 n 项和为 S_n, 且 $S_{10}=S_{15}$, 问当 n 为何值时, S_n 有最大值, 并求出它的最大值.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 是前 n 项和，若 $S_{16}>0$ 且 $S_{17}<0$，则当 S_n 最大时，n 的值为 (　　)

A. 16　　B. 9　　C. 8　　D. 10

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d．已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$a_7<0$，则（　　）

A. $a_6>0$

B. $-\dfrac{24}{7}<d<-3$

C. $S_n<0$ 时，n 的最小值为 13

D. 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 中最小项为第 7 项

20. (2024• 咸阳模拟) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{2023}<0$，$a_{2024}>0$，且 $a_{2024}>|a_{2023}|$，S_n 是其前 n 项和，则（　　）

A. S_1，$S_2\cdots S_{2023}$ 都小于 0，S_{2024}，$S_{2025}\cdots$ 都大于 0

B. S_1，$S_2\cdots S_{4045}$ 都小于 0，S_{4046}，$S_{4047}\cdots$ 都大于 0

C. S_1，$S_2\cdots S_{1012}$ 都小于 0，S_{1013}，$S_{1014}\cdots$ 都大于 0

D. S_1，$S_2\cdots S_{4046}$ 都小于 0，S_{4047}，$S_{4048}\cdots$ 都大于 0

题型四：证明等差数列

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{3}{5}$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$．证明 $\{b_n\}$ 是等差数列．

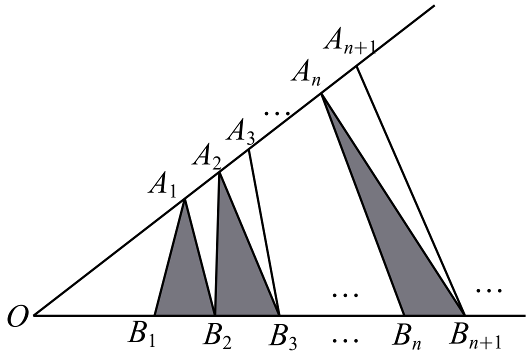
22. (2016 天津) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d．对任意的 $n\in N^*$，b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项．

(1) 设 $c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$，$n\in N^*$．求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

23. 已知数列 $S_n=\dfrac{n(a_n-a_1)}{2}$，证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

24. 如图，点列 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 分别在锐角两边(不在锐角顶点)，且 $|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|$，$A_n\neq A_{n+2}$，$|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|$，$B_n\neq B_{n+1}$，$n\in N^*$($P\neq Q$ 表示点 P 与 Q 不重合)，若 $d_n=|A_nB_n|$，S_n 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积，则（　　）

A. $\{d_n\}$ 是等差数列　　B. $\{S_n\}$ 是等差数列
C. $\{d_n^2\}$ 是等差数列　　D. $\{S_n^2\}$ 是等差数列



课堂总结

作业

1. 设 S_n 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_8=4a_3, a_7=-2$，则 $a_9=$ ______.

2. 下列关于等差数列的命题中正确的有（　　）

A. 若 a, b, c 成等差数列，则 a^2, b^2, c^2 一定成等差数列

B. 若 a, b, c 成等差数列，则 $2^a, 2^b, 2^c$ 可能成等差数列

C. 若 a, b, c 成等差数列，则 $ka+2, kb+2, kc+2$ 一定成等差数列

D. 若 a, b, c 成等差数列，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 可能成等差数列.

3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0, a_7+a_{10}<0$，则当 $n=$ ______ 时，$\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取最大值，则 d 的取值范围是 ______.