第15讲:等比数列的性质拓展

题型一:等比数列的基本量及性质

1. (2019全国Ⅰ)记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$,则 $S_5=$ ______.

2. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $3S_3=a_4-2$, $3S_2=a_3-2$,则公比 $q=$ ______.

3. (2017江苏)等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数,其前 n 项和为 S_n,已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$, $S_6=\dfrac{63}{4}$,则 $a_8=$ ______.

4. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中,a_4, $3a_3$, a_5 成等差数列. 若数列 $\{a_n\}$ 中存在两项 a_m, a_n,使得 $\sqrt{2}a_1$ 为它们的等比中项,则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值为(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 6　　D. 9

5. (2012全国)已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,$a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$,则 $a_1+a_{10}=$(　　)

A. 7　　B. 5　　C. -5　　D. -7

6. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$ ______.

7. (2024·佛山模拟) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5a_6a_7=-27$，则 $a_2a_6+a_2a_{10}+a_6a_{10}$ 有（　　）

A. 最小值 -9　　B. 最大值 18　　C. 最小值 27　　D. 最大值 -81

8. 设 $f(n)=2+2^4+2^7+\cdots+2^{3n+10}(n\in N^*)$，则 $f(n)=$ ______.

A. $\dfrac{2}{7}(8^n-1)$　　B. $\dfrac{2}{7}(8^{n+1}-1)$　　C. $\dfrac{2}{7}(8^{n+3}-1)$　　D. $\dfrac{2}{7}(8^{n+4}-1)$

9. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，设甲：$\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列；乙：存在一个非零常数 t，使 $\left\{\dfrac{S_n}{t}+1\right\}$ 是等比数列，则（　　）

A. 甲是乙的充要条件　　B. 甲是乙的充分不必要条件

C. 甲是乙的必要不充分条件　　D. 甲是乙的既不充分也不必要条件

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_8+S_{24}=140$，且 $S_{24}=13S_8$，则 $S_{16}=$（　　）

A. 40　　B. -30　　C. 30　　D. -30 或 40

11. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_8-2S_4=6$，则 $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$ 的最小值为 ______.

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n-1$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 等于（　　）

A. $(2^n-1)^2$　　B. $\dfrac{(2^n-1)^2}{3}$　　C. 4^n-1　　D. $\dfrac{4^n-1}{3}$

13. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_2=2$，$a_5=\dfrac{1}{4}$，则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$ 的值为（　　）

A. $16(1-4^{-n})$　　B. $16(1-2^{-n})$　　C. $\dfrac{32}{3}(1-4^{-n})$　　D. $\dfrac{32}{3}(1-2^{-n})$

题型二：等比数列的单调性

14. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$a_1<a_2<a_3$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的（　　）

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

15. (2024·湖北模拟) 无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 公比为 q，下列条件能使 $\{a_n\}$ 既有最大值，又有最小值的有（　　）

A. $a_1>0$，$0<q<1$　　B. $a_1>0$，$-1<q<0$

C. $a_1<0$，$q=-1$　　D. $a_1<0$，$q<-1$

16. (2016 全国Ⅰ) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为 ______.

17. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_8=8$,$a_{11}+4a_{12}=\frac{1}{4}$,则 $a_1a_2\cdots a_n$ 取最大值时 n 的值为 (　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

18. 等比数列 $\{a_n\}$ 中,公比为 q,其前 n 项积为 T_n,并且满足 $a_1>1$． $a_{99}\cdot a_{100}-1>0$，$\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1}<0$,下列选项中,正确的结论有 (　　)

A. $0<q<1$

B. $a_{99}\cdot a_{101}-1<0$

C. T_{100} 的值是 T_n 中最大的

D. 使 $T_n>1$ 成立的最大自然数 n 等于 198

19. (2024· 合肥模拟) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,前 n 项和为 S_n,则 (　　)

A. $S_{n+1}=S_1+qS_n$

B. 对任意 $n\in N^*$，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列

C. 对任意 $n\in N^*$,都存在 q,使得 S_n，$2S_{2n}$，$3S_{3n}$ 成等差数列

D. 若 $a_1<0$,则数列 $\{S_{2n-1}\}$ 递增的充要条件是 $-1<q<0$

题型三:等比数列的证明

20. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列,则称 $f(x)$ 为"保等比数列函数". 现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数: ① $f(x)=x^2$; ② $f(x)=2^x$; ③ $f(x)=\sqrt{|x|}$; ④ $f(x)=\ln|x|$. 则其中是"保等比数列函数"的序号为 (　　)

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②④

21. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$, $b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|$, $n\in N^*$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=$ ______.

课堂总结

作业

1. 一个由实数组成的等比数列,它的前 6 项和是前 3 项和的 9 倍,则此数列的公比为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

2. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列,其前 n 项和为 S_n,且 $9S_3=S_6$, 则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为

A. $\frac{15}{8}$ 或 5　　B. $\frac{31}{16}$ 或 5　　C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{15}{8}$

3. (2014 全国) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_4=2$, $a_5=5$,则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 (　　)

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

4. (2008 四川) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$,则其前 3 项的和 S_3 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$