第16讲：数列求通项方法总结

题型一：累加法

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{2n-1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(n+1)^2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题型二：累乘法

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3n-1}{3n+2}a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

题型三:隔项成等差、等比

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

7. (2016 山东) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=b_n+b_{n+1}$.

(Ⅰ) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

题型四:a_n 和 S_n 的关系式

9. (2015 全国Ⅰ) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

10. (2023· 甲卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$2S_n=na_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

11. 数列 $\{a_n\}$ 中，各项均为正数，S_n 为前 n 项和，且有 $a_n+\frac{1}{a_n}=2S_n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$\frac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\frac{1}{3}n^2-n-\frac{2}{3}$，$(n\in N^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_4=4S_2, a_{2n}=2a_n+1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}=1-\dfrac{1}{2^n}$，$n\in N^*$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

15. (2021 全国 1) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

(1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

题型五: 构造数列

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4, a_n=3a_{n-1}+2n-1(n\geqslant 2)$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (2020 全国III) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2, a_3,猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3\cdot 2^n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 已知数列 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$, 且 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. (2014 全国 II) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$ ______.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n-n$, 证明：$\{a_n-n-1\}$ 等比数列.

26. (2010 全国Ⅰ) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$.

(1) 设 $c=\frac{5}{2}, b_n=\frac{1}{a_n-2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

27. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{2^{n+1}a_n}{a_n+2^n}$.

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{2^n}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

课堂总结

作业

1. (2012 全国) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，前 n 项和 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，证明：数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列.