第 18 讲:数列综合性问题

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n^2+tn+2$,已知其为单调递增数列,则 t 的取值范围为 (　　)

A. $[-4,+\infty)$　　B. $(-6,+\infty)$　　C. $[-6,+\infty)$　　D. $(-\infty,-4)$

2. (2024·海淀区校级三模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{2n-7}{2n-15}$,前 n 项和为 S_n,前 n 项积为 T_n,则下列结论正确的个数为

① a_n 既有最小值,又有最大值;

②满足 $a_na_{n+1}a_{n+2}<0$ 的 n 的值共有 6 个;

③使 S_n 取得最小值的 n 为 7;

④ T_n 有最小值,无最大值.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{n}{n^2+90}$,则 $\{a_n\}$ 的最大项为 ______.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,公比 $q=\sqrt{2}$,S_n 为其前 n 项和. 记 $T_n=\dfrac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}$,$n\in N^*$, 设 T_{n_0} 为数列 $\{T_n\}$ 的最大项, 则 $n_0=$ ______.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{2n^2+7n+7}{n^2+3n+3}$，则 a_n 的范围为 ______.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n+2)\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$，则 a_n 的最大项为 ______.

7. 若数列 $\left\{n(n+4)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ 中的最大项是第 k 项，则 $k=$ ______.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，首项 $a_1>0$，公比 $q\in(-1,0)$，则下列叙述正确的是（　　）

A. 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 a_1

B. 数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 a_2

C. 数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 为递增数列

D. 数列 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$ 为递增数列

9. 若 n 是正整数，求证：$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2$.

10. 求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$.

11. 求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$.

12. 求证:$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 n 项的和为 S_n，且满足 $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geqslant 2)$.

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$S_1+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{3}S_3+\ldots+\frac{1}{n}S_n<\frac{3}{2}$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $4S_n=(2n-1)a_{n+1}+1$，且 $a_1=1$

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n\sqrt{S_n}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{3}{2}$

15. (2014 全国) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=3a_n+1$.

(1) 证明: 数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 证明:$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

16. (2016 四川卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1}=qS_n+1$, 其中 $q>0,n\in N^*$.

(1) 若 $2a_2,a_3,a_2+2$ 成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{a_n^2}=1$ 的离心率为 e_n, 且 $e_2=\dfrac{5}{3}$, 证明:$e_1+e_2+\cdots+e_n>\dfrac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$.

17. (2021 天津卷) 已知数列的通项公式为 $a_n=2n-1$,数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=4^n$。

(1)$c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n}$,求证:$\{c_n^2-c_{2n}\}$ 为等比数列。

(2) 求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<2\sqrt{2}$

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=10\cdot 4^{n-1}(n\in N^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $b_n=\log_2 a_n$.

(1) 求 b_n,S_n.

(2) 设 $c_n=\frac{b_n+1}{2}$, 证明:$\sqrt{c_1\cdot c_2}+\sqrt{c_2\cdot c_3}+\cdots+\sqrt{c_n\cdot c_{n+1}}<\frac{1}{2}S_{n+1}$.

课堂总结

作业

1. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1, \frac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\frac{1}{3}n^2-n-\frac{2}{3}, n\in N^*$.

(1) 求 a_2 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明：对一切正整数 n，有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{7}{4}$.