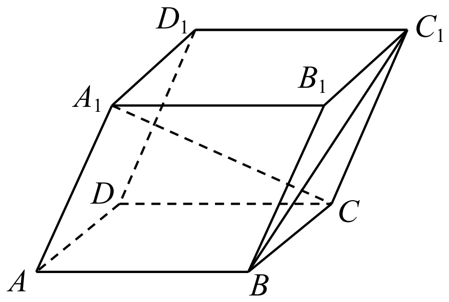
第2讲:空间向量题型拓展(2)

1. 如图,平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$, $AD=AA_1=1$.

(1) 求 BC_1 与 A_1C 所成角的余弦值;

(2) 若空间有一点 P 满足: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AA_1}$,求点 P 到直线 BD 的距离.

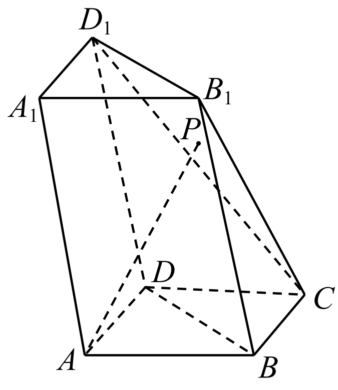


2. 如图,多面体 $A_1B_1D_1-ABCD$ 是将一个平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C-B_1C_1D_1$ 后剩下的几何体,点 P 为三角形 CB_1D_1 的重心. 四边形 $ABCD$ 是边长为1的正方形,且 $AA_1=2$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=120^\circ$.

(1) 求证: $AP\perp BD$;

(2) 求线段 AP 的长;

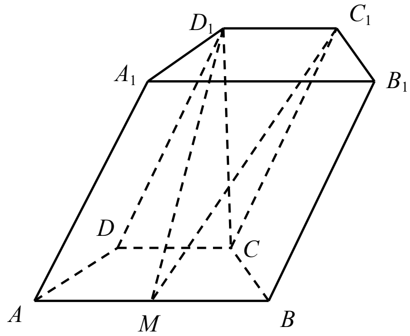
(3) 求异面直线 AP 与 B_1C 所成角的余弦值.



3. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2CD=2$，M 是线段 AB 的中点.

(Ⅰ) 求证：$C_1M /\!/ A_1ADD_1$；

(Ⅱ) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1=\sqrt{3}$，求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角（锐角）的余弦值.

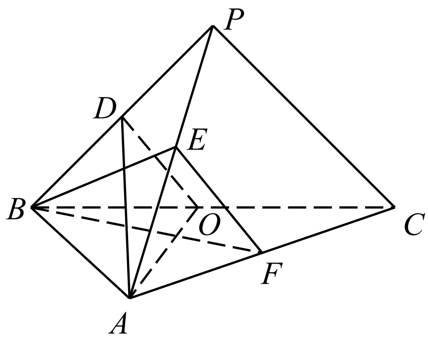


4. (2023· 乙卷) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{5}DO$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.

(1) 证明：$EF /\!/$ 平面 ADO；

(2) 证明：平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

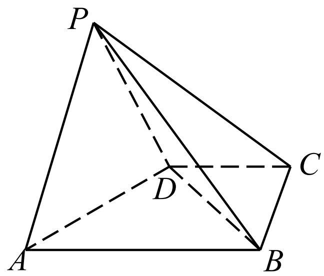
(3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.



5. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$CD \parallel AB$，$\angle ABC=90°$，$AB=2CD$，三棱锥 $B-PCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积，并在答卷上画出交线 l；

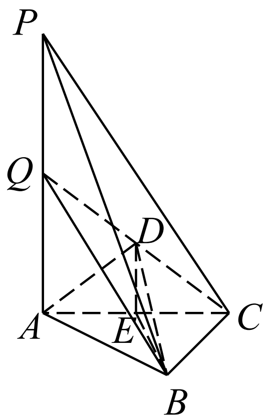
(2) 若 $AB=2BC=4$，$PA=PD$，且平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，在 l 上是否存在点 N，使二面角 $P-DC-N$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，请求出 PN 的长；若不存在，请说明理由.



6. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp AC$，Q,D,E 分别是线段 PA,QC,AC 的中点，$BD=\sqrt{2}$，$PA=2AC=4BE=4$.

(1) 求证：$DE\perp$ 平面 ABC；

(2) 若二面角 $Q-BD-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求 $\angle ACB$.



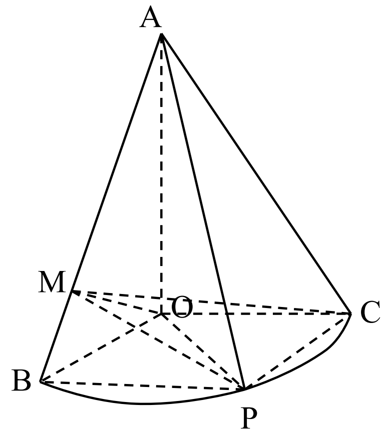
7. 如图所示的几何体是圆锥的一部分，A 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面圆的圆心，$\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$，$P$ 是弧 BC 上一动点（不与 B，C 重合），点 M 在 AB 上，且 $AM=3MB$，$OA=\sqrt{3}OB=\sqrt{3}$.

(1) 当 $\angle BOP=\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明：$AB\perp$ 平面 MOP；

(2) 若四棱锥 $M-OCPB$ 的体积大于等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$；

①求二面角 $B-AO-P$ 的取值范围；

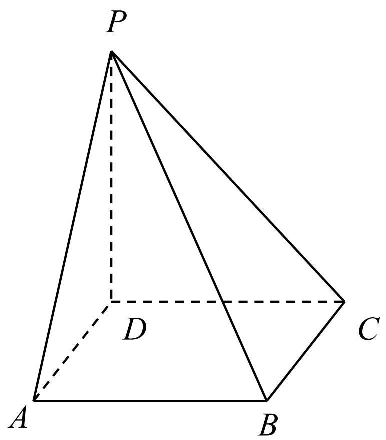
②记异面直线 AP 与 BO 所成的角为 α，求 $\cos\alpha$ 的最大值.



8. (2020 新高考Ⅰ) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 证明：$l\perp$ 平面 PDC；

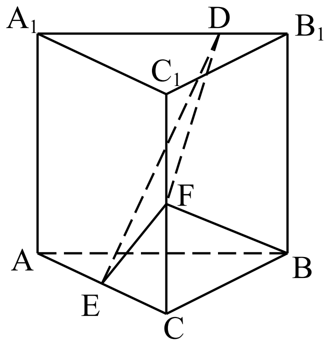
(2) 已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



9. (2021 甲卷) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.

(1) 证明：$BF\perp DE$；

(2) 当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小？



10. (2024 春·武汉月考) 如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, M 是线段 AD 上的一动点，如图 2，将 ΔABM 沿着 BM 折起，使点 A 到达点 P 的位置，满足点 $P\notin$ 平面 $BCDM$.

(1) 如图 2，当 $BC=2MD$ 时，点 N 是线段 PC 的中点，求证：$DN//$ 平面 PBM；

(2) 如图 2，若点 P 在平面 $BCDM$ 内的射影 E 落在线段 BC 上.

①是否存在点 M，使得 $BP\perp$ 平面 PCM，若存在，求 PM 的长；若不存在，请说明理由；

②当三棱锥 $E-PBM$ 的体积最大值时，求点 E 到平面 PCD 的距离.

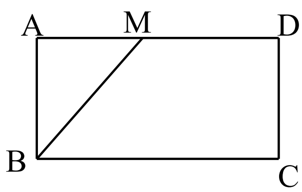


图1

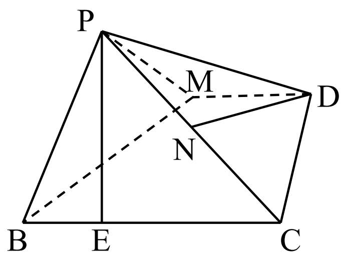


图2

课堂总结

作业

1. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，D，E，F，G 分别为 AA_1，AC，A_1C_1，BB_1 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.

   (Ⅰ) 求证：$AC\perp$ 平面 BEF；

   (Ⅱ) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；

   (Ⅲ) 证明：直线 FG 与平面 BCD 相交.