

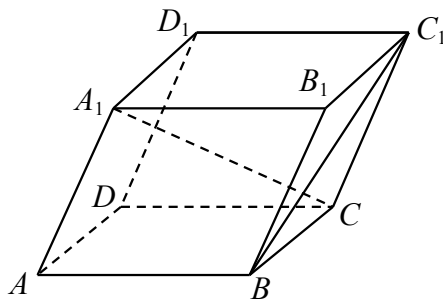


第2讲:空间向量题型拓展(2)

1. 如图,平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, $AD = AA_1 = 1$.

(1) 求 BC_1 与 A_1C 所成角的余弦值;

(2) 若空间有一点 P 满足: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA_1}$, 求点 P 到直线 BD 的距离.

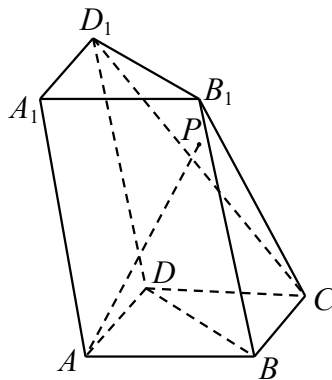


2. 如图,多面体 $A_1B_1D_1 - ABCD$ 是将一个平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C - B_1C_1D_1$ 后剩下的几何体,点 P 为三角形 CB_1D_1 的重心. 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,且 $AA_1 = 2$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$.

(1) 求证: $AP \perp BD$;

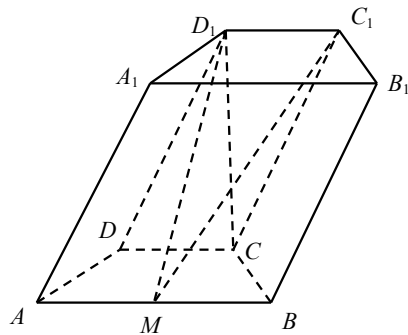
(2) 求线段 AP 的长;

(3) 求异面直线 AP 与 B_1C 所成角的余弦值.

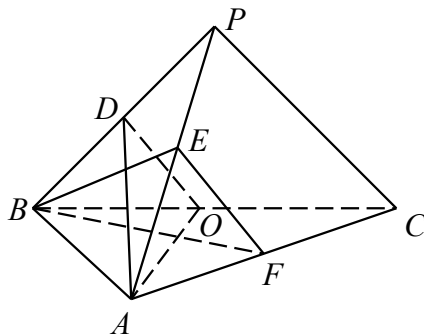




3. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 2CD = 2$, M 是线段 AB 的中点.
- (I) 求证: $C_1M \parallel A_1ADD_1$;
- (II) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1 = \sqrt{3}$, 求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值.

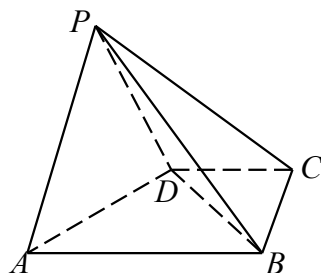


4. (2023·乙卷) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $PB = PC = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{5}DO$, BP , AP , BC 的中点分别为 D , E , O , 点 F 在 AC 上, $BF \perp AO$.
- (1) 证明: $EF \parallel$ 平面 ADO ;
- (2) 证明: 平面 $ADO \perp$ 平面 BEF ;
- (3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.

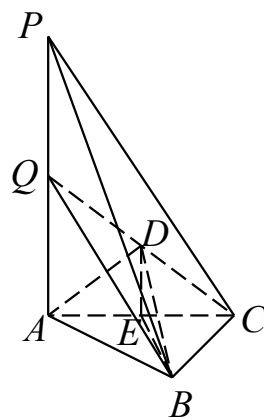




5. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $CD \parallel AB$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2CD$, 三棱锥 $B-PCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .
- (1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积, 并在答卷上画出交线 l ;
- (2) 若 $AB = 2BC = 4$, $PA = PD$, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 在 l 上是否存在点 N , 使二面角 $P-DC-N$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$? 若存在, 请求出 PN 的长; 若不存在, 请说明理由.



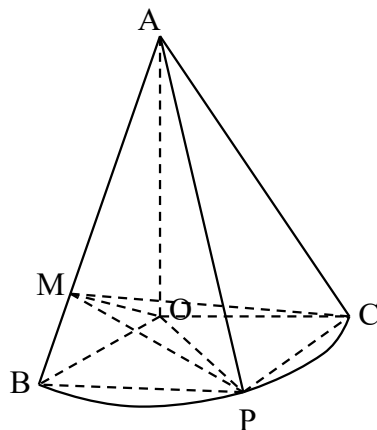
6. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AC$, Q, D, E 分别是线段 PA, QC, AC 的中点, $BD = \sqrt{2}$, $PA = 2AC = 4BE = 4$.
- (1) 求证: $DE \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 若二面角 $Q-BD-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求 $\angle ACB$.





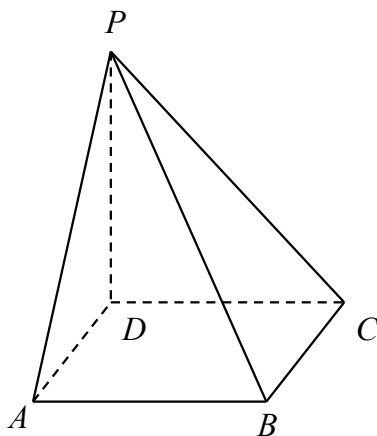
7. 如图所示的几何体是圆锥的一部分, A 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面圆的圆心, $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$, P 是弧 BC 上一动点 (不与 B, C 重合), 点 M 在 AB 上, 且 $AM = 3MB$, $OA = \sqrt{3}OB = \sqrt{3}$.

- (1) 当 $\angle BOP = \frac{\pi}{2}$ 时, 证明: $AB \perp$ 平面 MOP ;
 (2) 若四棱锥 $M-OCPB$ 的体积大于等于 $\frac{\sqrt{3}}{16}$;
 ① 求二面角 $B-AO-P$ 的取值范围;
 ② 记异面直线 AP 与 BO 所成的角为 α , 求 $\cos \alpha$ 的最大值.



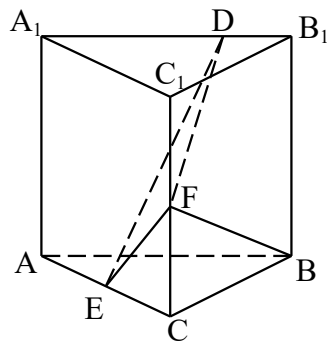
8. (2020 新高考 I) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

- (1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;
 (2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.





9. (2021 甲卷) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.
- (1) 证明: $BF \perp DE$;
- (2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



10. (2024 春·武汉月考) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1, BC=\sqrt{2}$, M 是线段 AD 上的一动点, 如图 2, 将 $\triangle ABM$ 沿着 BM 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 满足点 $P \notin$ 平面 $BCDM$.
- (1) 如图 2, 当 $BC=2MD$ 时, 点 N 是线段 PC 的中点, 求证: $DN \parallel$ 平面 PBM ;
- (2) 如图 2, 若点 P 在平面 $BCDM$ 内的射影 E 落在线段 BC 上.
- ① 是否存在点 M , 使得 $BP \perp$ 平面 PCM , 若存在, 求 PM 的长; 若不存在, 请说明理由;
- ② 当三棱锥 $E-PBM$ 的体积最大值时, 求点 E 到平面 PCD 的距离.

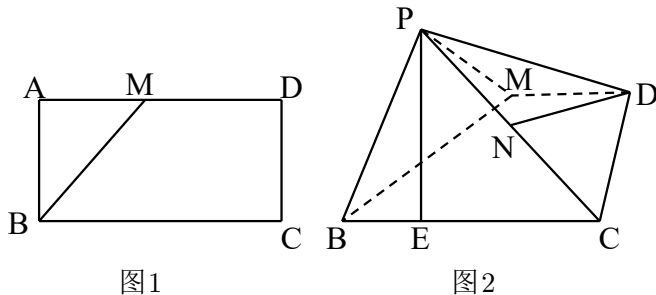


图1

图2





课堂总结



作业

1. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , D, E, F, G 分别为 AA_1, AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AB=BC=\sqrt{5}$, $AC=AA_1=2$.
- (I) 求证: $AC \perp$ 平面 BEF ;
- (II) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值;
- (III) 证明: 直线 FG 与平面 BCD 相交.

