第 4 讲：直线与圆题型拓展 (2)

题型一：最值问题

1. 已知实数 x,y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$.

(1) 求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值和最小值；(2) 求 $y-x$ 的最大值和最小值；(3) 求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

2. 已知点 $P(a,b)$ 在直线 $x-y=0$ 上，则 $\sqrt{a^2+b^2-2a+2b+2}+\sqrt{(a-2)^2+b^2}$ 的最小值为 (　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{5}$

3. (2024·济宁二模) 已知 O 是坐标原点，$A(3,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $|PO|=2|PA|$，则 $\dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最大值为 (　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

4. 若点 M 是圆 C：$x^2+y^2-4x=0$ 上的任一点，直线 l：$x+y+2=0$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最小值为 (　　)

A. $4-2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $8-4\sqrt{2}$　　D. 8

5. (2023 全国乙卷理科 12 题) 已知圆的半径为 1，PA 与圆 O 相切，切点为 A，过点 P 的直线与圆交于 B，C 两点，D 为 BC 的中点，$OP=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 (　　)

A. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

6. 在平面直角坐标系中，A，B分别是x轴和y轴上的动点，若以AB为直径的圆C与直线$2x+y-4=0$相切，则圆C面积的最小值为（　　）

A. $\frac{4}{5}\pi$　　B. $\frac{3}{4}\pi$　　C. $(6-2\sqrt{5})\pi$　　D. $\frac{5}{4}\pi$

7. 已知圆C_1:$(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆C_2:$(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M，N分别是圆C_1，C_2上的动点，P为x轴上的动点，则$PM+PN$的最小值为（　　）

A. $6-2\sqrt{2}$　　B. $5\sqrt{2}-4$　　C. $\sqrt{17}-1$　　D. $\sqrt{17}$

8. 已知点P为直线$y=x+1$上的一点，M，N分别为圆C_1：$(x-4)^2+(y-1)^2=1$与圆C_2：$(x-3)^2+(y-1)^2=1$上的点，则$|PM|+|PN|$的最小值为（　　）

A. 5　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 已知直线l：$y=x+b$，圆O：$x^2+y^2=4$，则下列说法正确的是（　　）

A. 圆O上恰有1个点到直线l的距离为1，则$b=\pm3\sqrt{2}$

B. 圆O上恰有2个点到直线l的距离为1，则$b\in(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$

C. 圆O上恰有3个点到直线l的距离为1，则$b=\pm\sqrt{2}$

D. 圆O上恰有4个点到直线l的距离为1，则$b\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

10. 若圆$x^2+y^2-4x-4y-10=0$上至少有三个不同点到直线l:$ax+by=0$的距离为$2\sqrt{2}$，求直线l的倾斜角的取值范围.

题型二：综合性问题

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$, 求 a 的值.

12. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$，当 m 变化时，解答下列问题：

(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况?说明理由；

(2) 证明过 A、B、C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

13. (2014· 新课标Ⅰ) 已知点 $P(2,2)$，圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程；

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时，求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

14. (2015· 新课标Ⅰ) 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于点 M、N 两点.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$.

15. (2015·广东) 已知过原点的动直线 l 与圆 C_1:$x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A，B.

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k，使得直线 L:$y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在，求出 k 的取值范围;若不存在，说明理由.

16. 已知圆 O: $x^2+y^2=8$，直线 l: $x-y-8=0$.

(1) 若圆 O 的弦 AB 恰好被点 $P(2,1)$ 平分，求弦 AB 所在直线的方程;

(2) 点 Q 是直线 l 上的动点，过 Q 作圆 O 的两条切线，切点分别为 C，D，求直线 CD 经过的定点;

(3) 过点 $M(2,2)$ 作两条相异的直线，分别与圆 O 相交于 E，F 两点，当直线 ME 与直线 MF 的斜率互为倒数时，求线段 EF 的中点 G 的轨迹方程.

课堂总结

作业

1. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2+2x=0$，则下列关于 $\frac{y}{x-1}$ 的判断正确的是（　　）

A. $\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

B. $\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

C. $\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 已知圆 O：$x^2+y^2=2$，直线 l:$y=kx-2$.

(1) 若直线 l 与圆 O 交于不同的两点 A,B，当 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ 时，求 k 的值；

(2) 若 $k=\frac{1}{2}$，P 是直线 l 上的动点，过 P 作圆 O 的两条切线 PC、PD，切点为 C、D，探究：直线 CD 是否过定点；

(3) 若 EF、GH 为圆 O：$x^2+y^2=2$ 的两条相互垂直的弦，垂足为 $M\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，求四边形 $EGFH$ 的面积的最大值.