第 5 讲:椭圆与双曲线题型拓展 (1)

题型一:焦半径及焦点弦长问题

1. (2021 新高考Ⅰ) 设 F_1,F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，M 是椭圆上任意一点，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值和最小值是 ______.

2. (2019 全国Ⅲ) 设 F_1,F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限. 若 ΔMF_1F_2 为等腰三角形，则 M 的坐标为 ______.

3. 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$ 上一点，F_1,F_2 分别是双曲线左、右两个焦点，若 $|PF_1|=9$ 则 $|PF_2|=$ ______.

4. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x$，F_1、F_2 分别为该双曲线的左、右焦点，M 为双曲线上的一点，则 $|MF_2|+\dfrac{16}{|MF_1|}$ 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 12

5. 点 $A(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 的右支上，若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$，则 $x_0=$ ________.

6. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为 ________，直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 C 的公共点个数 ________.

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若椭圆上存在一点 P 使 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，则该椭圆的离心率的取值范围为 ______.

8. (2019•新课标Ⅰ) 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过点 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

9. (2010 全国Ⅱ) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与 C 相交于 A,B 两点. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$, 则 $k=$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

10. 设 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 A 为椭圆的上顶点，点 B 在椭圆上且满足 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆的离心率为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

题型二：中点弦问题

11. (2015· 全国) 直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$ 相交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $(2，1)$，则 l 的斜率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 1　　D. -1

12. 已知双曲线 E 的中心为原点，$P(3，0)$ 是 E 的焦点，过 P 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，且 AB 的中点为 $N(-12，-15)$，则 E 的方程式为 (　　)

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

13. 椭圆 C:$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>b>0)$ 的左右顶点分别为 A_1、A_2,点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$,那么直线 PA_1 斜率的取值范围是(　　)

A. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

14. 已知 P 是椭圆 E:$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 上任意一点,M,N 是椭圆上关于坐标原点对称的两点,且直线 PM,PN 的斜率分别为 k_1,$k_2(k_1k_2\neq 0)$,若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1,则实数 m 的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 16　　D. 2 或 8

15. (2015 全国新课标)已知 A,B 为双曲线 E 的左右顶点,点 M 为双曲线 E 上一点,ΔABM 为等腰三角形,且顶角为 120°,则该双曲线的离心率为(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

16. (2022 甲卷)椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A,点 P,Q 均在 C 上,且关于 y 轴对称.若直线 AP,AQ 的斜率之积为 $\dfrac{1}{4}$,则 C 的离心率为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

17. 已知点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 为椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点,点 $P\left(\dfrac{a}{4},0\right)$ 满足 $|PM|=|PN|$,则 C 的离心率 e 的取值范围为(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

18. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过 C 中心的直线交 C 于 M，N 两点，点 P 在 x 轴上，其横坐标是点 M 横坐标的 3 倍，直线 NP 交 C 于点 Q，若直线 QM 恰好是以 MN 为直径的圆的切线，则 C 的离心率为 (　　)

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

19. (2022• 新高考 II) 已知直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 M，N 两点，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为 ______.

20. 给定双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

(1) 过点 $A(2,1)$ 的直线 L 与所给的双曲线交于两点 P_1 及 P_2，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

(2) 过点 $B(1,1)$ 能否作直线 m，使 m 与所给双曲线交于两点 Q_1 及 Q_2，且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点？这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由.

21. (2023·乙卷) 设 A，B 为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 上两点，下列四个点中，可为线段 AB 中点的是 ______.

A. $(1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(1,3)$　　D. $(-1,-4)$

22. (2014·浙江) 设直线 $x-3y+m=0(m\neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A，B. 若点 $P(m,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$，则该双曲线的离心率是 ______.

23. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，过点 $P(1,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，且满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则下列结论正确的是（　　）

A. 若直线 AB 过右焦点 F_2，则 $\lambda=7\pm 4\sqrt{3}$

B. 若 $\lambda=1$，则直线 AB 方程为 $2x+3y-5=0$

C. 若 $\lambda=2$，则直线 AB 方程为 $3x+2y-5=0$

D. 若动点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，则点 Q 的轨迹方程为 $2x+3y-6=0$

课堂总结

作业

1. 设 A、B 是直线 $y=2x-3$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个交点，M 是 AB 的中点． O 为坐标原点，则直线 OM 的斜率为（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{8}$

2. 过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，若 M 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率等于 ______.

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1、F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围为（　　）

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点为 F_1、F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则 $x_0=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$