



第6讲:椭圆与双曲线题型拓展(2)

题型一:最值问题

1. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的最大值为 _____.

2. (2021 全国 I 文) 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在椭圆上, 则 $|PB|$ 的最大值为 _____.

3. 已知定点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) 到椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点的距离的最小值为 1, 则 a 的值为 _____.

4. (2021 全国 I 理) 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$





5. 设 P, Q 分别为 $x^2 + (y-6)^2 = 2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 上的点, 则 P, Q 两点间的最大距离是 ()
- A. $5\sqrt{2}$ B. $\sqrt{46} + \sqrt{2}$ C. $7 + \sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内有一点 $P(1, -1)$, F 是椭圆的右焦点, M 是椭圆上一点, 则
(1) $MP + MF$ 的最大值、最小值分别为 _____; (2) $MP + \sqrt{5}MF$ 的最小值为 _____.

7. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左焦点, $A(1, 4)$, P 是双曲线右支上的动点, 则 $|PF| + |PA|$ 的最
小值为 _____.

8. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点, P 是 C 的左支上一点, $A(0, 6\sqrt{6})$, 当 ΔAPF 周长最小时, 该三角形的面积为 _____.

9. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点, A, B 分别为右顶点、上顶点, O 为坐标原点, P 是椭圆上
第一象限任意一点, 则四边形 $OAPB$ 面积的最大值是 _____.





10. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, P 是椭圆上任意一点, 则 P 到直线 $x + y + 5 = 0$ 距离的最大值最小值分别为 _____.

题型二: 渐近线问题

11. 已知双曲线 C 经过点 $C(1, 1)$, 它的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$. 则双曲线 C 的标准方程是 _____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 $F(c, 0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则其离心率的值为 _____.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

14. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的顶点到渐近线的距离等于 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$





15. (2019·新课标 I) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\vec{F_1A} = \vec{AB}$, $\vec{F_1B} \cdot \vec{F_2B} = 0$, 则 C 的离心率为 _____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过点 F 且斜率为 2 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则双曲线的离心率可以是 ()

17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点, 且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N , 设 O 为坐标原点, 求 ΔOMN 面积.

18. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 右支上的动点, 过 P 作两渐近线的垂线, 垂足分别为 A, B . 若圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 与双曲线 C 的渐近线相切, 则下列命题正确的是 ()

- A. 双曲线 C 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $|PA| \cdot |PB|$ 为定值

C. $|AB|$ 的最小值为 3

D. 若直线 $y = k_1x + m$ 与双曲线 C 的渐近线交于 M, N 两点, 点 D 为 MN 的中点, OD (O 为坐标原点) 的斜率为 k_2 , 则 $k_1k_2 = \frac{1}{3}$



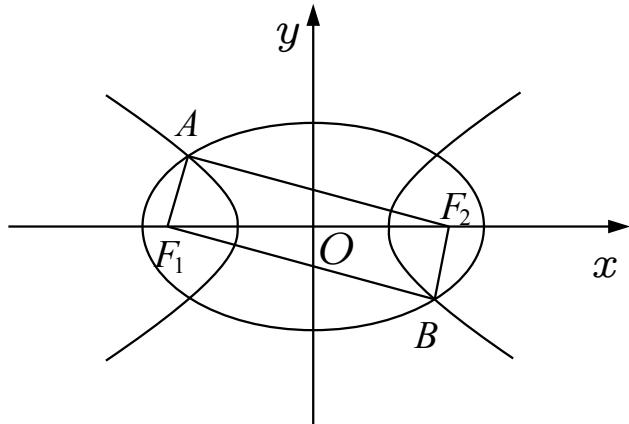


19. 已知点 P 为双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上任意一点, 过点 P 分别作 E 的两条渐近线的垂线, 垂足分别为 M, N , 记 $\triangle PMN$ 的面积为 S , 则 ()
- A. $\angle MPN = \frac{2\pi}{3}$ B. $|PM| \cdot |PN| = \frac{12}{7}$
 C. $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{12}{49}$ D. $S = \frac{24\sqrt{3}}{49}$

题型三: 椭圆双曲线综合问题

20. 如图 F_1, F_2 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点, A, B 分别是 C_1, C_2 在第二、四象限的公共点, 若四边形 AF_1BF_2 为矩形, 则 C_2 的离心率是 ()

- A. $\sqrt{2}$
 B. $\sqrt{3}$
 C. $\frac{3}{2}$
 D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$



21. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2}$ 的值为 () .
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4





22. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 2





课堂总结



（此部分为课堂总结区，提供20行手写空间）



作业

1. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $|OP|^2 + |PF|^2$ 的最小值为 _____.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的左焦点为 F , 一动直线与椭圆交于点 M, N , 则 $\triangle FMN$ 的周长的最大值为 _____.

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 直线 $y = k(x - c)$ 与 C 的右支有两个交点, 则 ()

- A. $|k| < \frac{b}{a}$ B. $|k| > \frac{b}{a}$ C. $|k| < \frac{c}{a}$ D. $|k| > \frac{c}{a}$

4. 设 M 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, A_1 和 A_2 分别是椭圆的左、右顶点, 则 $\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MA_2}$ 的最小值等于 _____.

