第 8 讲:直线与圆锥曲线的位置关系

1. 已知椭圆的一个顶点为 $A(0,-1)$,焦点在 x 轴上.若右焦点到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离为 3.

   (1) 求椭圆的方程;

   (2) 设椭圆与直线 $y=kx+m(k\neq 0)$ 相交于不同的两点 M、N.当 $|AM|=|AN|$ 时,求 m 的取值范围.

2. 已知椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过三点 $(0,1)$,$(1,1)$,$(-\sqrt{2},0)$ 中的两点.

   (1) 求 E 的方程;

   (2) 过 E 的右焦点的直线 l 与 E 交于 A,B 两点,在直线 $x=2$ 上是否存在一点 D,使得 $\triangle ABD$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形?若存在,求出 l 的方程;若不存在,请说明理由.

3. 已知抛物线 C：$y^2=2px$ 的 $(p>0)$ 焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线 m 交抛物线 C 于 A，B 两点，若在直线 l 上存在一点 M，使 $\triangle MAB$ 是等边三角形，求直线 m 的斜率.

4. 已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，经过点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，其离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

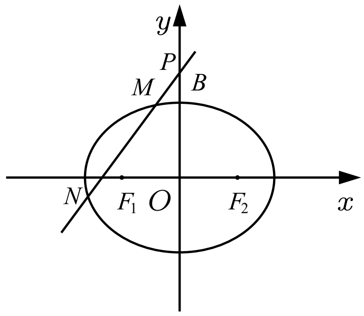
(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 l:$y=kx+m\left(|k|\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，以线段 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OAPB$,其中顶点 P 在椭圆 C 上，O 为坐标原点. 求 $|OP|$ 的取值范围.

5. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 B，Q 为抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，且 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{QB}=0$，$2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{QF_1}=0$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 过定点 $P(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点 (M 在 P，N 之间)，设直线 l 的斜率为 $k(k>0)$，在 x 轴上是否存在点 $A(m,0)$，使得以 AM，AN 为邻边的平行四边形为菱形? 若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由.



6. (2010 浙江) 已知 $m>1$，直线 $l:x-my-\dfrac{m^2}{2}=0$，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{m^2}+y^2=1$，F_1,F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点.

(Ⅰ) 当直线 l 过右焦点 F_2 时，求直线 l 的方程；

(Ⅱ) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，ΔAF_1F_2，ΔBF_1F_2 的重心分别为 G,H. 若原点 O 在以线段 GH 为直径的圆内，求实数 m 的取值范围.

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $\sqrt{2}$,直线 $l_1:y=2x+4\sqrt{3}$ 与双曲线 C 仅有一个公共点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设双曲线 C 的左顶点为 A,直线 l_2 平行于 l_1,且交双曲线 C 于 M,N 两点,求证:$\triangle AMN$ 的垂心在双曲线 C 上.

8. (2024·天津) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}$,左顶点为 A,下顶点为 B,C 是线段 OB 的中点,其中 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆方程.

(2) 过点 $\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$ 的动直线与椭圆有两个交点 P,Q,在 y 轴上是否存在点 T 使得 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$ 恒成立. 若存在,求出这个 T 点纵坐标的取值范围;若不存在,请说明理由.

9. (2010 新课标) 设 F_1,F_2 分别是椭圆 E: $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A、B 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列.

(1) 求 $|AB|$；

(2) 若直线 l 的斜率为 1，求 b 的值.

课堂总结

作业

1. 已知中心在原点的椭圆 C 的左焦点 $F(-\sqrt{3},0)$, 右顶点 $A(2,0)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点, 求弦长 $|AB|$ 的最大值及此时 l 的直线方程.