第9讲:圆锥曲线解答题之弦长问题

题型一:弦长公式

1. 已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$,过椭圆右焦点 F_2 作两条互相垂直的弦 AB 与 CD,当直线 AB 的斜率为 0 时,$|AB|+|CD|=7$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 求 $|AB|+|CD|$ 的取值范围;

(3) 求四边形 $ACBD$ 的面积的范围.

2. 已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点(A,B 不在 x 轴上),$\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若点 P 在椭圆 C 上,且 $OP\perp AB$(O 为坐标原点),求 $\dfrac{|OP|^2}{|AB|^2}$ 的取值范围.

3. (2016 全国 II 理 20) 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

(1) 当 $t=4$，$|AM|=|AN|$ 时，求 ΔAMN 的面积；

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 $F(1,0)$，短轴的端点分别为 B_1,B_2，且 $\overrightarrow{FB_1}\cdot\overrightarrow{FB_2}=-a$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 M,N 两点，弦 MN 的垂直平分线与 x 轴相交于点 D，设弦 MN 的中点为 P，求 $\dfrac{|DP|}{|MN|}$ 的取值范围.

5. 设椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 经过点 $M(2,\sqrt{2})$，$N(\sqrt{6},1)$，O 为坐标原点.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)是否存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒在两个交点 A、B 且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$? 若存在,写出该圆的方程,并求 $|AB|$ 的取值范围;若不存在,说明理由.

题型二:弦长公式的本质

6. 过椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点 F 作弦 AB,证明:$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}$ 为定值.

7. (2016 四川理 20) 已知椭圆 E 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点，直线 $l{:}y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.

(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

(2) 设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且与直线 l 交于点 P. 证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值.

8. （2023 届四省联考）已知双曲线 $C{:}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $A(4\sqrt{2},3)$，且焦距为 10.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $B(4\sqrt{2},-3)$，$D(2\sqrt{2},0)$，E 为线段 AB 上一点，且直线 DE 交 C 于 G，H 两点. 证明：$\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$.

9．(2021新高考Ⅰ卷) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$．记 M 的轨迹为 C．

(1) 求 C 的方程；

(2) 设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和．

课堂总结

作业

1. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，若过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 P,Q 两点

求证：$\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$ 为定值.